流れの安定性と保存量

竹広 真一

2014/06/27

キーワード：積分定理, 運動量・エネルギー保存則, 波の共鳴

1　流れの安定性の問題とは

流れが時間とともにどのように変化していくかを表現する数理モデルとして, ナビエストークス方程式あるいはオイラー方程式が良く用いられている. しかしながら, これらの方程式の時間変化しない (定常) 解を求めることができたとしても, かならずしもその解が実際に定常な流れとして自然界に存在できるとは限らない. 自然界にはかならず微小なゆらぎが存在している. 定常解に微小なゆらぎが加わったときに, そのゆらぎが発達して元の流れを壊してしまうかもしれないからである. これが「流れの安定性」の問題と呼ばれるものである.

2　2 次元平行非圧縮流の安定性の定式化

2 次元非圧縮流体の平行流の安定性を調べる. 考える領域は, x 方向には無限あるいは周期的, y 方向には壁あるいは無限.

- ナビエ=ストークス方程式, 境界条件
  2 次元非圧縮流体の振舞いを記述する方程式系はナビエストークス方程式と呼ばれるつぎのようなものである.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

ここで u, v はそれぞれ x, y 方向の速度成分, p は圧力を表わす. 境界条件は, y 方向に無限領域, あるいは x 軸に平行な壁がある場合,

$$v = 0 \quad \text{at the boudaries.} \tag{4}$$

- 渦度方程式

  渦度の z 成分の式[1] $\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ を導くために (1) を y で, (2) を x で微分し, 引き算する.

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{5}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{7}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \zeta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \tag{9}$$

  連続の式 (3) を用いると結局渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \tag{10}$$

  が求まる.

- 基本流と擾乱, 線形方程式

  今, 安定性を考える基本流を x 方向に一様な流れ $u = U(y), v = 0$ とする. この解はもとのナビエストークス方程式と連続の式を満たしている (定常解) であることに注意されたい.

  この基本流に対して微小な擾乱 u', v' が加えられたときのその後の流れの変化を調べたい. そのために $u = U(y) + u'(x, y, t), v = v'(x, y, t)$ を (1),(2)(3) に代入する.

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + u\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial U}{\partial y} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial x},$$

[1] 渦度のイメージを伝えなければならない

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+U\frac{\partial v'}{\partial x}+u'\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}=-\frac{\partial p'}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0.$$

u', v' が微小量として 2 次以上の非線形項を無視すると (線形化).

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+U\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{dU}{dy}=-\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{11}$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t}+U\frac{\partial v'}{\partial x}=-\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{12}$$
$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0. \tag{13}$$

境界条件は,

$$v'=0 \quad \text{at the boudaries.} \tag{14}$$

- 線形渦度方程式

  圧力を消去するために渦度方程式の形にする. (11) を y で, (12) を x で微分し, 引き算すると

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u'}{\partial y}+U\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{dU}{dy}\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{\partial v'}{\partial y}\frac{dU}{dy}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v'}{\partial x}+U\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial x}\right)=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}\right)+U\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}\right)-\frac{dU}{dy}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)-v'\frac{d^2U}{dy^2}=0.$$

  渦度擾乱 $\zeta'=\dfrac{\partial v'}{\partial x}-\dfrac{\partial u'}{\partial y}$ を導入し, 連続の式 (13) を用いると,

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t}+U\frac{\partial \zeta'}{\partial x}-\frac{d^2U}{dy^2}v'=0. \tag{15}$$

- 流線関数, フーリエ展開, Rayleigh 方程式

  連続の式を満たすべく速度場を表わすために流線関数 ψ' をつぎのように導入する.

$$u'=-\frac{\partial \psi'}{\partial y},\quad v'=\frac{\partial \psi'}{\partial x},\quad \zeta'=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\nabla^2\psi'. \tag{16}$$

  すると流線関数だけの方程式にすることができて,

$$\frac{\partial \nabla^2\psi'}{\partial t}+U\frac{\partial \nabla^2\psi'}{\partial x}-\frac{d^2U}{dy^2}\frac{\partial \psi'}{\partial x}=0. \tag{17}$$

  ここで x と t に関して三角関数の形で解を求めることにする (フーリエ展開). このことは方程式の係数が x, t によらないことにより可能となる.

$$\psi'(x,y,t)=Re\tilde{\psi}(y)e^{ik(x-ct)}. \tag{18}$$

k は x 方向の波数, c は位相速度である．全ての波数成分について足しあわせることにより完全な解が得られるが, 各波数成分の時間発展は独立なので, 1 成分の式だけ解けばよい．この式を (17) に代入すると,

$$-ikc\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right)\tilde{\psi}'+ikU\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right)\tilde{\psi}'-ik\frac{d^2U}{dy^2}\tilde{\psi}'=0.$$

したがって

$$[U(y)-c]\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right)\tilde{\psi}'-\frac{d^2U}{dy^2}\tilde{\psi}'=0. \tag{19}$$

この式は Rayleigh 方程式と呼ばれる．これは境界条件

$$\tilde{\psi}'=0 \quad \text{at the boudaries,} \tag{20}$$

とあわせて, c に関する固有値問題を構成する．c の虚部が正の固有値が得られたら, その擾乱は時間に関して指数的に増大することになり基本場の流れが不安定であると判定される．逆に, 全ての固有値の虚部が 0 以下であったなら基本場の解は (中立) 安定であると判定されうる．厳密に安定であるというためには, 求められた固有関数が完全系をなすかどうかに依存するが, 実際問題としては安定と判断することが多い.

3 例題：折れ線モデル

滑からな基本流の分布の安定性を解くことは難しいのでつぎのような折れ線分布の基本流の安定性を例題として解いてみよう.

- 問題設定
  基本流 $U(y)$ の分布が

$$U(y)=\begin{cases} U_o & (y\geq a)\\ U_o y/a & (-a\leq y\leq a)\\ -U_o & (y\leq -a)\end{cases} \tag{21}$$

  である流れ場の安定性を考える.

- 定式化
  各領域において $\dfrac{d^2U}{dy^2}=0$ であるから, Rayleigh 方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right)\tilde{\psi}'=0.$$

この解は e^{ky} と e^{-ky} の線形結合で表わされる．$y \leftarrow \pm\infty$ で $\tilde{\psi}' \to 0$ の境界条件を用いると, 各領域における解はつぎのようにおける．

$$\tilde{\psi}' = \begin{cases} Ae^{-k(y-a)} & (y \geq a) \\ Be^{-k(y-a)} + Ce^{k(y+a)} & (-a \leq y \leq a) \\ De^{k(y+a)} & (y \leq -a) \end{cases} \tag{22}$$

ここで A, B, C, D は定数係数である．これらを定めるには $y = \pm a$ で解を接続しなければならない．そのための条件は, 流線関数 $\tilde{\psi}'$ が連続であること [2] と圧力が連続であることである．

圧力が連続である条件は, 擾乱のナビエストークス方程式 x 成分より導かれる．

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{dU}{dy} = -\frac{\partial p'}{\partial x},$$

流線関数 $\tilde{\psi}'$ で表わすと,

$$-ik(U-c)\frac{d\tilde{\psi}'}{dy} + ik\frac{dU}{dy}\tilde{\psi}' = -\frac{\partial p'}{\partial x},$$

したがって

$$-(U-c)\frac{d\tilde{\psi}'}{dy} + \frac{dU}{dy}\tilde{\psi}' \tag{23}$$

が連続という条件になる．

- 解析解を求める
  $y = \pm a$ における連続条件を適用する．$y = a$ においては

$$A = B + Ce^{2ka}, \quad k(U_0 - c)A = [k(U_0 - c) + U_0/a]B + [-k(U_0 - c) + U_0/a]e^{2ka}C.$$

$y = -a$ においては,

$$Be^{2ka} + C = D, \quad [k(-U_0 - c) + U_0/a]Be^{2ka} + [-k(-U_0 - c) + U_0/a]C = -k(-U_o - c)D.$$

行列形式で書けば

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -e^{2ka} & 0 \\ k(U_0 - c) & -[k(U_0 - c) + U_0/a] & -[-k(U_0 - c) + U_0/a]e^{2ka} & 0, \\ 0 & e^{2ka} & 1 & -1 \\ 0 & [-k(U_0 + c) + U_0/a]e^{2ka} & [k(U_0 + c) + U_0/a] & -k(U_o + c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0 \tag{24}$$

[2]正確には y 方向の変位擾乱が連続．すなわち $\tilde{\psi}'/(U-c)$ が連続．いま速度分布に飛びがないので流線が連続であれば良い

A, B, C, D が非零である解を持つためには係数行列の行列式が 0 でなければならない. その条件から c と k の関係 (分散関係) が定まり (実際の計算はレポート課題) [3],

$$c^2 = \left(\frac{U_0}{2ka}\right)^2 [(1-2ka)^2 - e^{-4ka}], \tag{25}$$

となる. この式は ka が十分小さいところで左辺が負になることがわかる [4] ので, c が純虚数になり虚数部が正の解が存在する. したがって, この流れは不安定であることがわかる.

4 積分定理

実際に基本流 $U(y)$ を与えて Rayleigh 方程式を固有値問題として解析的に解くことは難しい. その代わりに, 不安定擾乱の存在のための必要条件を導くことができる. それらの条件は領域全体での積分によって証明されるので積分定理と呼ばれる.

- Rayleigh の変曲点定理

---

[3]

$$\begin{aligned}
(det.) \quad &= \begin{vmatrix} -[k(U_0-c)+U_0/a] & -[-k(U_0-c)+U_0/a]\,e^{2ka} & 0 \\ e^{2ka} & 1 & -1 \\ [-k(U_0+c)+U_0/a]\,e^{2ka} & [k(U_0+c)+U_0/a] & -k(U_o+c) \end{vmatrix} \\
&\quad -k(U_0-c)\begin{vmatrix} -1 & -e^{2ka} & 0 \\ e^{2ka} & 1 & -1 \\ [-k(U_0+c)+U_0/a]\,e^{2ka} & [k(U_0+c)+U_0/a] & -k(U_o+c) \end{vmatrix} \\
&= k(U_o+c)[k(U_0-c)+U_0/a] + [-k(U_0-c)+U_0/a][-k(U_0+c)+U_0/a]e^{4ka} \\
&\quad -[k(U_0-c)+U_0/a][k(U_0+c)+U_0/a] - k(U_o+c)[-k(U_0-c)+U_0/a]e^{4ka} \\
&\quad -k(U_0-c)\{k(U_o+c)+[-k(U_0+c)+U_0/a]e^{4ka} - [k(U_0+c)+U_0/a] - k(U_o+c)e^{4ka}\} \\
&= k^2(U_o^2-c^2) + k(U_o+c)U_0/a - k^2(U_o^2-c^2) - 2kU_0^2/a - U_0^2/a^2 + k(U_o-c)U_0/a \\
&\quad +\{k^2(U_o^2-c^2) - 2kU_0^2/a + U_0^2/a^2 + k^2(U_o^2-c^2) - k(U_o+c)U_0/a \\
&\quad +k^2(U_o^2-c^2) - k(U_0-c)U_0/a + k^2(U_o^2-c^2)\}e^{4ka} \\
&= -U_0^2/a^2 + \{4k^2(U_o^2-c^2) - 4kU_0^2/a + U_0^2/a^2\} = 0, \\
&\quad -U_0^2/a^2 e^{-4ka} + 4k^2(U_o^2-c^2) - 4kU_0^2/a + U_0^2/a^2 = 0, \\
&\quad 4k^2c^2 = U_0^2/a^2 - 4kU_0^2/a + 4k^2U_o^2 - U_0^2/a^2 e^{-4ka}, \\
&\quad c^2 = \frac{U_0^2}{4k^2a^2}(1-4ka+4k^2a^2) - e^{-4ka}) = \frac{U_0^2}{4k^2a^2}[(1-2ka)^2 - e^{-4ka}].
\end{aligned}$$

[4] $ka \ll 1$ のとき, ka で展開すると

$$(1-2ka)^2 - e^{-4ka} \sim [1-4ka+4(ka)^2] - \{1-4ka+(1/2)(4ka)^2+O[(ka)^3]\} = -4(ka)^2 + O[(ka)^3] < 0.$$

Rayleigh 方程式 (19) を変形して

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)\tilde{\psi}' - \frac{U_{yy}}{U(y) - c}\tilde{\psi}' = 0. \tag{26}$$

この式に流線関数の複素共役 $\tilde{\psi}'^*$ をかけて, y 方向全体で積分する.

$$\int_{y1}^{y2} dy\tilde{\psi}'^*\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)\tilde{\psi}' - \int_{y1}^{y2} dy\frac{U_{yy}}{U(y) - c}|\tilde{\psi}'|^2 = 0.$$

第 1 項目は部分積分をして境界で $\tilde{\psi}' = 0$ を用いると,

$$\int_{y1}^{y2} \tilde{\psi}'^*\frac{d^2\tilde{\psi}'}{dy^2}dy = \left[\tilde{\psi}'^*\frac{d\tilde{\psi}'}{dy}\right]_{y1}^{y2} - \int_{y1}^{y2} \frac{d\tilde{\psi}'^*}{dy}\frac{d\tilde{\psi}'}{dy}dy = -\int_{y1}^{y2}\left|\frac{d\tilde{\psi}'}{dy}\right|^2 dy,$$

であるから,

$$\int_{y1}^{y2} dy\left(\left|\frac{d\tilde{\psi}'}{dy}\right|^2 + k^2|\tilde{\psi}'|^2\right) + \int_{y1}^{y2} dy\frac{U_{yy}}{U(y) - c}|\tilde{\psi}'|^2 = 0. \tag{27}$$

この式の虚部を取りだしてみよう. 第 1 項目の積分は実数である.

$$\frac{1}{U - c} = \frac{1}{U - c_r - ic_i} == \frac{1}{(U - c_r)^2 + c_i^2}U - c_r + ic_i = \frac{1}{|U - c|^2}U - c_r + ic_i$$

であるから, 虚部は

$$c_i\int_{y1}^{y2} dy\frac{U_{yy}}{|U - c|^2}|\tilde{\psi}'|^2 = 0. \tag{28}$$

$|U - c|^2, |\tilde{\psi}'|^2$ が正定値であるから, 0 でない c_i が存在するためには U_{yy} が領域内で符号を変える必要がある. すなわち,

> 流れが不安定となるには領域内で $U_{yy} = 0$ となる点 (変曲点) が存在しなければならない.

これを Rayleigh の変曲点定理という.

- Fjørtoft の定理

  (27) の実部を取りだすと,

$$\int_{y1}^{y2} dy\left(\left|\frac{d\tilde{\psi}'}{dy}\right|^2 + k^2|\tilde{\psi}'|^2\right) + \int_{y1}^{y2} dy\frac{U_{yy}(U - c_r)}{U(y) - c}|\tilde{\psi}'|^2 = 0,$$

$$\int_{y1}^{y2} dy\frac{-U_{yy}(U - c_r)}{U(y) - c}|\tilde{\psi}'|^2 = \int_{y1}^{y2} dy\left(\left|\frac{d\tilde{\psi}'}{dy}\right|^2 + k^2|\tilde{\psi}'|^2\right) > 0.$$

ここで虚部の式から

$$\int_{y1}^{y2} dy \frac{U_{yy}}{|U-c|^2}|\tilde{\psi}'|^2 = 0. \tag{29}$$

であったので, これに任意の定数をかけて足し込むことにより,

$$\int_{y1}^{y2} dy \frac{-U_{yy}(U-U_a)}{U(y)-c}|\tilde{\psi}'|^2 > 0. \tag{30}$$

ここで U_a は任意の定数である. U_a を $U_{yy}=0$ の点での速度 U_s に選ぶことにより, つぎのことがいえる.

> 不安定擾乱が存在するには, 流れのどこかで $-U_{yy}(U-U_s)$ が正となる領域が存在する必要がある. ここで U_s は $U_{yy}=0$ の点での速度である.

これを Fjørtoft の定理という. もし $U(y)$ が単調な関数であり, 変曲点がただ一つしか持たないならば, $-U_{yy}(U-U_s)$ は変曲点 $y=y_s$ を除いて定符号であり, それが正である必要がある.

4.1 流れの安定性の例

- クエット流 $U(y)=y,\ y\in[-1,1]$
  どこでも $U_{yy}=0$. Rayleigh の変曲点定理は満たすが, Fjørtoft の定理を満たさないので安定.

- ポアユイズ流 $U(y)=1-y^2,\ y\in[-1,1]$
  どこでも $U_{yy}=2$. Rayleigh の変曲点定理を満たさないので安定.

- 3 次関数 $U(y)=y^3,\ y\in[-1,1]$
  $U_{yy}=6y$ なので変曲点 $y=0$ を一つ持つ. しかしながら $-U_{yy}(U-U_s)=-6y^4<0$ であり Fjørtoft の定理を満たさないので安定.

- $U(y)=\tanh y,\ y\in[-\infty,\infty]$
  $U_{yy}=-2\sinh y/\cosh^3 y$ なので変曲点 $y=0$ を一つ持つ. しかも $-U_{yy}(U-U_s)=2\sinh^2 y/\cosh^4 y>0$ であり Fjørtoft の定理を満たすので不安定である可能性あり.

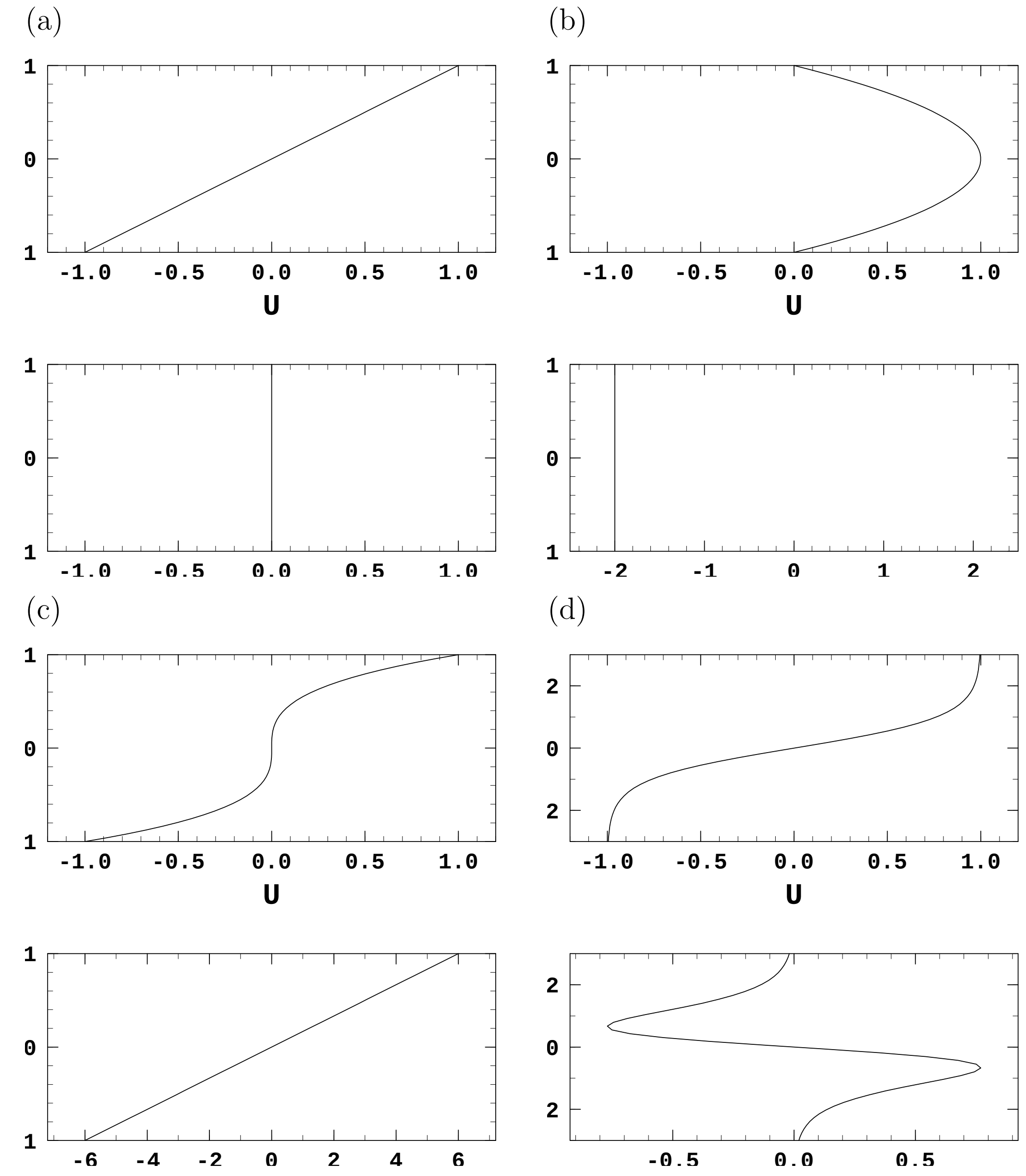

図 1: 流れの安定性の例. (a) クエット流 $U(y) = y$, 安定. (b) ポアズイユ流 $U(y) = 1 - y^2$, 安定. (c) 3 次関数 $U(y) = y^3$, 安定. (d) $U(y) = \tanh y$, 不安定.

5 保存量と積分定理

数学的に導出した先の積分定理は, 元々の系の保存量である擾乱の 2 次の運動量・エネルギー保存則に関係している.

- 運動量保存則
  運動量保存則は, (1) を擾乱の 2 次まで展開することにより得られる.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x},$$

に $u=U(y)+u'+u^{(2)}, v=v'+v^{(2)}$ と 2 次まで展開して代入し, 2 次のオーダーを取りだすと,

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+U\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}+v^{(2)}\frac{dU}{dy}=-\frac{\partial p^2}{\partial x},$$

x 方向に平均 $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L dx$ を作用させると周期的境界条件から x 微分の項は消えて,

$$\frac{\partial \overline{u^{(2)}}}{\partial t}++\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}+\overline{v^{(2)}}\frac{dU}{dy}=0.$$

左辺第 2 項目は連続の式を用いることにより

$$\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}=\overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}}-\overline{u'\frac{\partial v'}{\partial y}}=\overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}}+\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}=\overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}}.$$

左辺第 3 項目は 2 次の連続の式の x 平均から $\dfrac{\partial \overline{v^{(2)}}}{\partial y}=0$ であり, y 方向の境界条件より $\overline{v^{(2)}}=0$ とすることができる. したがって, 2 次の運動量保存則は

$$\frac{\partial \overline{u^{(2)}}}{\partial t}+\overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}}=0. \tag{31}$$

y 方向に全領域積分すれば全運動量の保存則が導かれる.

$$\frac{d}{dt}\int_{y1}^{y2}\overline{u^{(2)}}dy=0. \tag{32}$$

一方, 擾乱の渦度方程式 (15)

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t}+U\frac{\partial \zeta'}{\partial x}-\frac{d^2U}{dy^2}v'=0.$$

に ζ' をかけて x 平均をとると,

$$\overline{\zeta'\frac{\partial\zeta'}{\partial t}}+\overline{U\zeta'\frac{\partial\zeta'}{\partial x}}-\overline{\frac{d^2U}{dy^2}\zeta' v'}=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\zeta'^2}}{2U_{yy}}-\overline{\zeta' v'}=0,$$

ここで, 第 2 項目は

$$\overline{\zeta' v'}=\overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}\right)v'}=\overline{v'\frac{\partial v'}{\partial x}-v'\frac{\partial u'}{\partial y}}=\overline{-\frac{\partial u'v'}{\partial y}+u'\frac{\partial v'}{\partial y}}=\overline{-\frac{\partial u'v'}{\partial y}-u'\frac{\partial u'}{\partial x}}$$
$$=-\frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial y}.$$

したがって,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\zeta'^2}}{2U_{yy}}+\frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial y}=0. \tag{33}$$

これと運動量保存の式 (31) を組み合わせることにより,

$$\frac{\partial\overline{u^{(2)}}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\zeta'^2}}{2U_{yy}}=0.$$

初期に $u^{(2)},\zeta'=0$ の状態を考えれば

$$\overline{u^{(2)}}=\frac{\overline{\zeta'^2}}{2U_{yy}}. \tag{34}$$

2 次の量を 1 次の量で書き表すことができた. したがって運動量保存則は 1 次の量で表現すると,

$$\frac{d}{dt}\int_{y1}^{y2}\frac{\overline{\zeta'^2}}{2U_{yy}}dy=0. \tag{35}$$

不安定擾乱に対してもこの保存則は満たされなければならない. しかしながら不安定擾乱の ζ' は指数的に増大していく. したがってこの保存則を満たすには運動量の値そのものが 0 でなければならない.

$$\int_{y1}^{y2}\frac{\overline{\zeta'^2}}{2U_{yy}}dy=0,\quad \text{for unstable disturbances.} \tag{36}$$

したがって U_{yy} は流れのどこかで符号を変える必要がある. これが Rayleigh の変曲点定理である.

- エネルギー保存則
  元々のエネルギー保存則は, ナビエストークス方程式の x, y 成分 (1), (2) そ

れぞれに u, v をかけて足すことにより得られる.

$$
\begin{aligned}
&u\frac{\partial u}{\partial t} + u^2\frac{\partial u}{\partial x} + uv\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial t} + uv\frac{\partial v}{\partial x} + v^2\frac{\partial v}{\partial y} = -u\frac{\partial p}{\partial x} - v\frac{\partial p}{\partial y}, \\
&\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(u^2+v^2) + u\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(u^2+v^2) + v\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}(u^2+v^2) + \frac{\partial}{\partial x}(pu) + \frac{\partial}{\partial x}(pv) = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(u^2+v^2) + \frac{\partial}{\partial x}u\left[\frac{1}{2}(u^2+v^2)+p\right] + \frac{\partial}{\partial y}v\left[\frac{1}{2}(u^2+v^2)+p\right] = 0.
\end{aligned}
$$

x 方向に平均し, y 方向に全領域積分を行うと, 全 (運動) エネルギー保存則が得られる.

$$
\frac{d}{dt}\int_{y1}^{y2}\frac{1}{2}(\overline{u^2}+\overline{v^2})dy = 0. \tag{37}
$$

$u = U + u' + u^{(2)}$, $v = v' + v^{(2)}$ を代入し, 2 次のオーダーを取りだすと,

$$
\frac{d}{dt}\int_{y1}^{y2}\frac{1}{2}(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}) + U\overline{u^{(2)}}dy = 0.
$$

ここで $u^{(2)}$ の表現 (34) を代入すると,

$$
\frac{d}{dt}\int_{y1}^{y2}\frac{1}{2}(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}) + \frac{U}{2U_{yy}}\overline{\zeta'^2}dy = 0. \tag{38}
$$

さて, Fjørtoft の定理を導いてみよう. 2 次の全運動量保存則 (35) から

$$
\frac{d}{dt}\int_{y1}^{y2}\frac{\overline{\zeta'^2}}{2U_{yy}}dy = 0,
$$

であった. これに任意の定数をかけて全エネルギーの式に加えると,

$$
\frac{d}{dt}\int_{y1}^{y2}\frac{1}{2}(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}) + \frac{U-U_a}{2U_{yy}}\overline{\zeta'^2}dy = 0.
$$

ここで U_a は任意定数である. この積分の中味は不安定擾乱の 1 次量の 2 乗に比例する. しかしながら時間的に変化してはならないので, この積分の値は 0 でなければならない.

$$
\int_{y1}^{y2}\frac{1}{2}(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}) + \frac{U-U_a}{2U_{yy}}\overline{\zeta'^2}dy = 0, \quad \text{for unstable disturbances.}
$$

したがって

$$
-\int_{y1}^{y2}\frac{U-U_a}{2U_{yy}}\overline{\zeta'^2}dy = \int_{y1}^{y2}\frac{1}{2}(\overline{u'^2}+\overline{v'^2})dy > 0
$$

U_a を $U_{yy} = 0$ である点での流速 U_s に選ぶと, 不安定擾乱が存在するためには $-(U-U_s)/U_{yy}$ が流れのどこかで正となる領域が必要である. これが Fjørtoft の定理である.

- 不安定擾乱の発達と共鳴メカニズムの示唆
  不安定擾乱の運動量およびエネルギーが 0 でなければならないことは, 不安定擾乱の構造が, とある部分で正, 残りの部分で負となって足して 0 となっていることを意味する. このことは, 正の運動量およびエネルギーをもつ部分と, 負の運動量およびエネルギーをもつ部分とがお互い相互作用 (共鳴) してそれぞれの振幅が増幅していくという構造をしていることを示唆する.

6　折れ線モデル再考：波の共鳴による解釈

$y=a$ 付近に局在する擾乱の性質を調べてみよう. $y=-a$ の折れ曲がりを取り除いたときの流れ分布

$$U(y)=\begin{cases} U_o & (y\geq a) \\ U_o y/a & (y\leq a) \end{cases} \tag{39}$$

各々の領域の解は

$$\tilde{\psi}'=\begin{cases} Ae^{-k(y-a)} & (y\geq a) \\ Be^{+k(y-a)} & (y\leq a) \end{cases} \tag{40}$$

$y=a$ での連続条件から

$$A=B,\quad k(U_0-c)A=[-k(U_o-c)+U_o/a]B$$

これより c と k の関係が得られて,

$$2k(U_0-c)=U_0/a,\quad U_0-c=U_0/(2ka),$$

すなわち,

$$c=U_0\left(1-\frac{1}{2ka}\right). \tag{41}$$

同様に, $y=-a$ に局在する擾乱の性質を調べると $y=a$ の折れ曲がりを取り除いたときの流れ分布

$$U(y)=\begin{cases} U_o y/a & (y\geq -a) \\ -U_o & (y\leq -a) \end{cases} \tag{42}$$

各々の領域の解は

$$\tilde{\psi}'=\begin{cases} Ae^{-k(y+a)} & (y\geq -a) \\ Be^{+k(y+a)} & (y\leq -a) \end{cases} \tag{43}$$

$y=-a$ での連続条件から

$$A=B,\quad [k(-U_0-c)+U_o/a]A=-k(-U_o-c)B$$

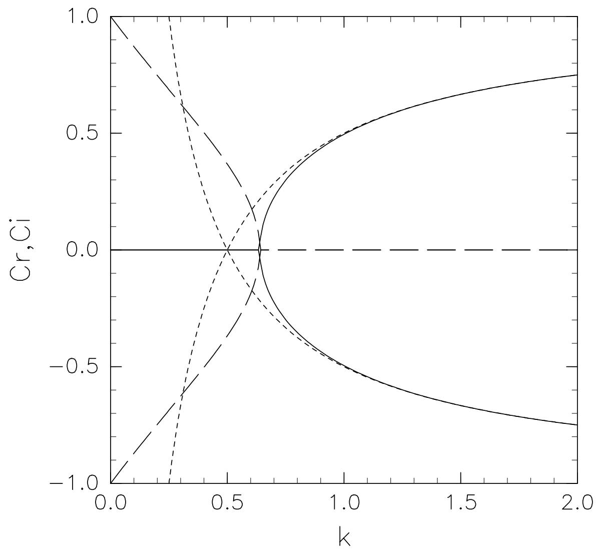

図 2: 折れ線モデルの分散関係.

これより c と k の関係が得られて,

$$-2k(U_0+c)+U_0/a=0, \quad U_0+c=U_0/(2ka),$$

すなわち,

$$c=U_0\left(-1+\frac{1}{2ka}\right). \tag{44}$$

それぞれの分散関係を, 先に求めた不安定擾乱の分散関係とあわせてかいたのが下図である. $y=a$ と $y=-a$ に局在する擾乱どうしの分散曲線が交わるところで不安定擾乱が発生している. このことは 2 つの擾乱が共鳴 (相互作用) することで不安定が発生していることを示唆している.