

# データ駆動型乱流研究に対する 力学系的アプローチ

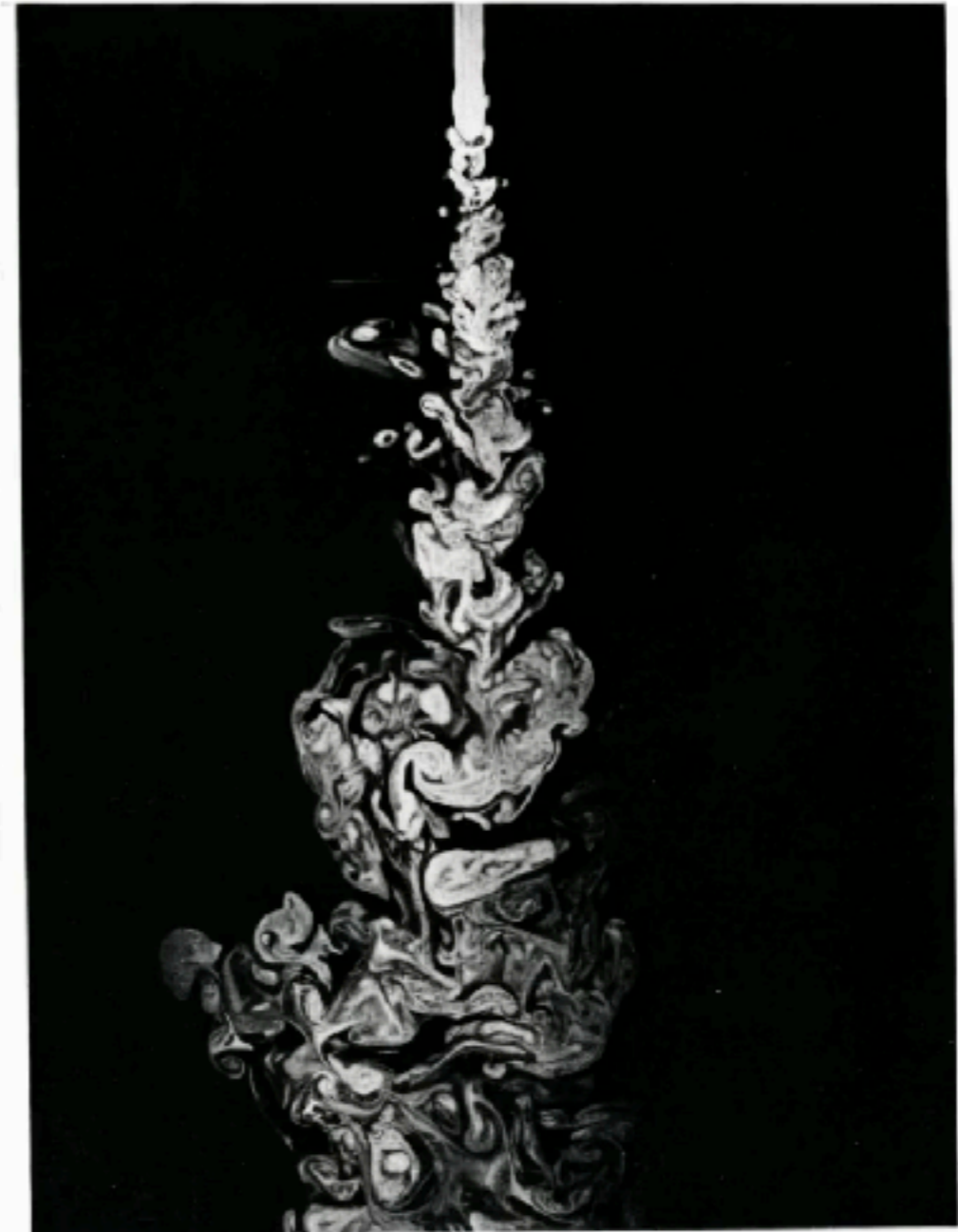
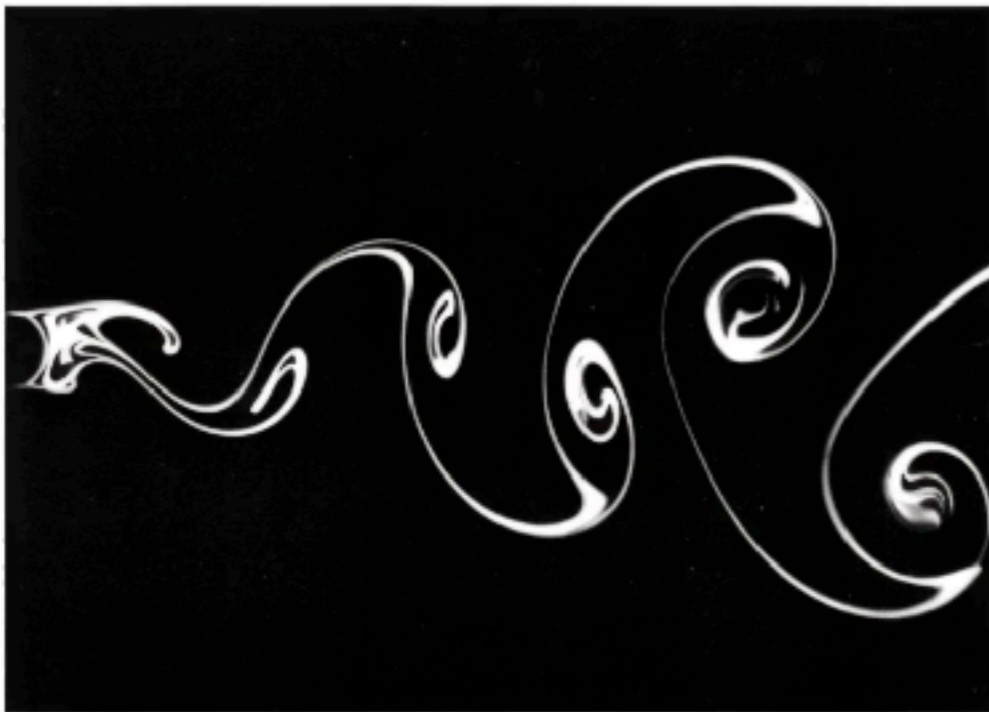


犬伏正信

東京理科大学 理学部応用数学科 / 大阪大学 大学院基礎工学研究科  
GFDオンラインセミナー 第13回 (2024年2月19日)

# Van Dyke with Generative AI

## An Album of Fluid Motion



105. *Tschalner wasser jol.* Experimented Bannstern  
chais die composition of 24. Bild in the photo of  
nature of an phenomenon in of water directed directed  
into water. The Bayer's number is approximately 545.

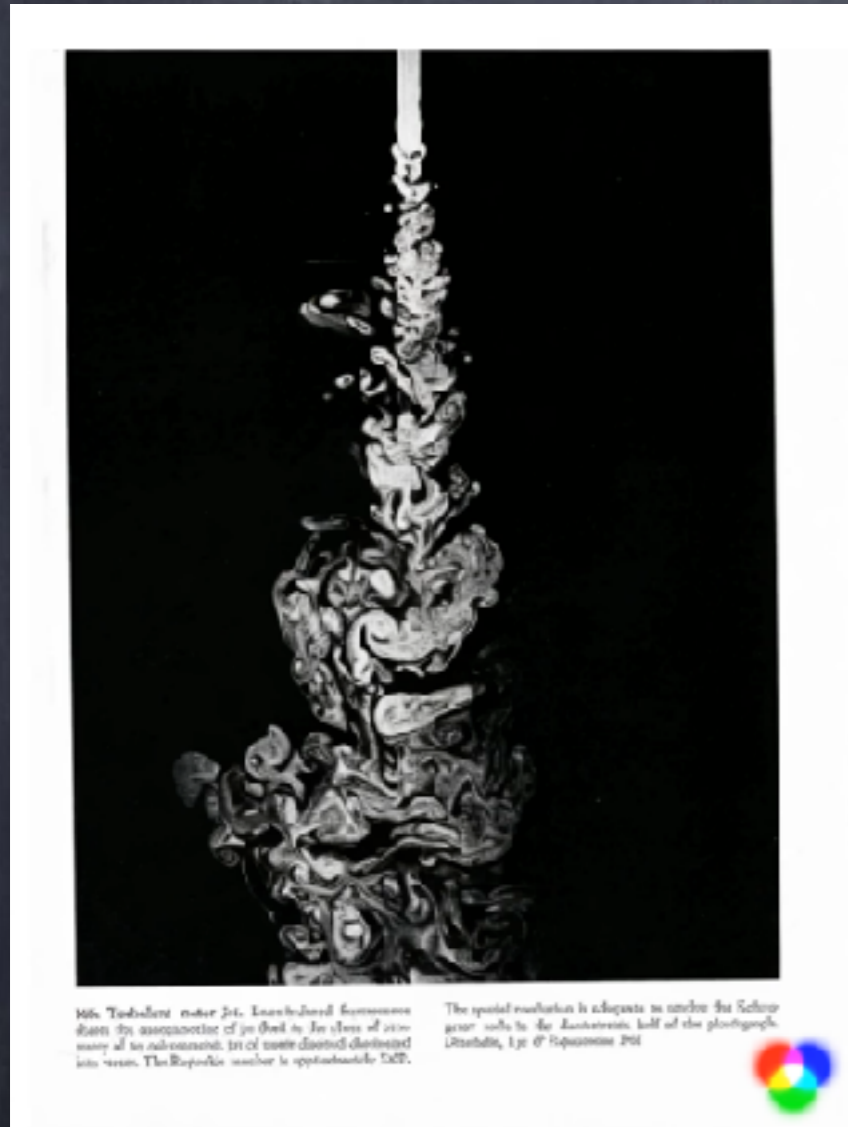
The spiral transition is adaptive to reach the Bohm  
group with in the direction half of the photograph.  
Dresden, Exp. 29 Experiment 598



# Gen-2 by Runway

The screenshot displays the Runway Gen-2 Motion Brush interface. At the top, the title "Motion Brush BETA" is visible. The central area features a video frame of a jet engine with a purple brushstroke applied to its upper section. Below the frame, three control sliders are shown: "Horizontal (x-axis)" set to 0.0, "Vertical (y-axis)" set to -0.2, and "Proximity (z-axis)" set to 0.0. The interface includes a "Learn how to use Motion Brush with Runway Academy" link, "Clear" and "Save" buttons, and a bottom navigation bar with options for "TEXT", "IMAGE", and "IMAGE + DESCRIPTION". The current prompt in the "IMAGE + DESCRIPTION" tab reads: "Move jets ejected from above that are stationary & stationary".

# NG集

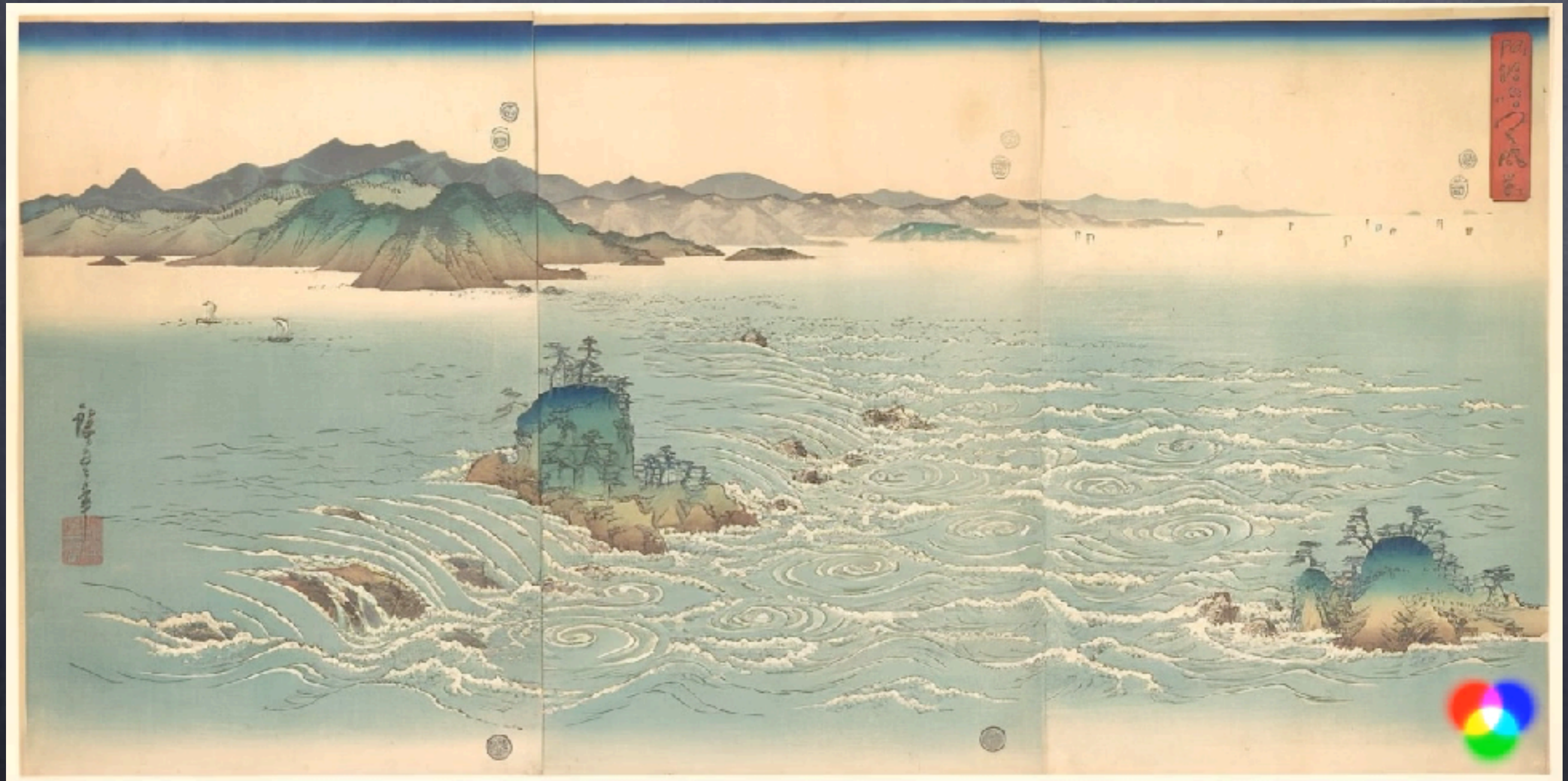


拡散⇒発散？

逆流？

異なる乱流？

# 阿波鳴門之風景（歌川広重）



Hiroshige Utagawa, The Whirlpools of Awa (1857) <https://www.metmuseum.org/art/collection/search/45025>



Rory Flynn @Ror\_Fly · 11月25日  
Motion brush in runway...damn good.

Much better control.

This was very needed.

#runwayml #midjourneyV52 #AIArtCommunity #aiart



Wolf Dynamics @WolfDynamics · 12月13日  
Adding some motion to Davinci's sketches from  
Studies of water passing obstacles and falling

The motion was added using generative AI. The CFD simulation coming later.



# データ駆動型乱流研究とその理論的基盤

- ▶ AI: 原理不明のまま乱流の“シミュレーション”が可能
  - 今後データから直接シミュレーションが可能に？
  - 現状の多くのデータ駆動型研究は、モデル化性能の見極めや開発指針は経験やノウハウに依存。それらを保証する理論的基盤がない。
- ▶ 本研究：力学系理論に着目
  - 力学系理論の概念や現象（Lyapunov次元やBlowout分岐）が最新のデータ駆動型乱流研究において重要になることを紹介。



# おしながき

## ▶ カオスと乱流

- カオスとLyapunov指数, Lyapunov次元
- Blowout分岐と横断Lyapunov指数
- 乱流の力学系的解釈

## ▶ データ駆動型乱流研究

- MLによる乱流モデルの低次元化限界 (Lyapunov次元) [1]
- 乱流の小スケール渦の隷属性とデータ同化限界 (横断Lyapunov指数) [2]

## ▶ まとめ

[1] Linot and Graham, Dynamics of a data-driven low-dimensional model of turbulent minimal Couette flow, J. Fluid Mech. 973, A42 (2023).

[2] Inubushi, Saiki, Kobayashi, and Goto, Characterizing small-scale dynamics of Navier-Stokes turbulence with transverse Lyapunov exponents: A data assimilation approach, Phys. Rev. Lett. 131, 254001 (2023).



# カオスとLyapunov指数

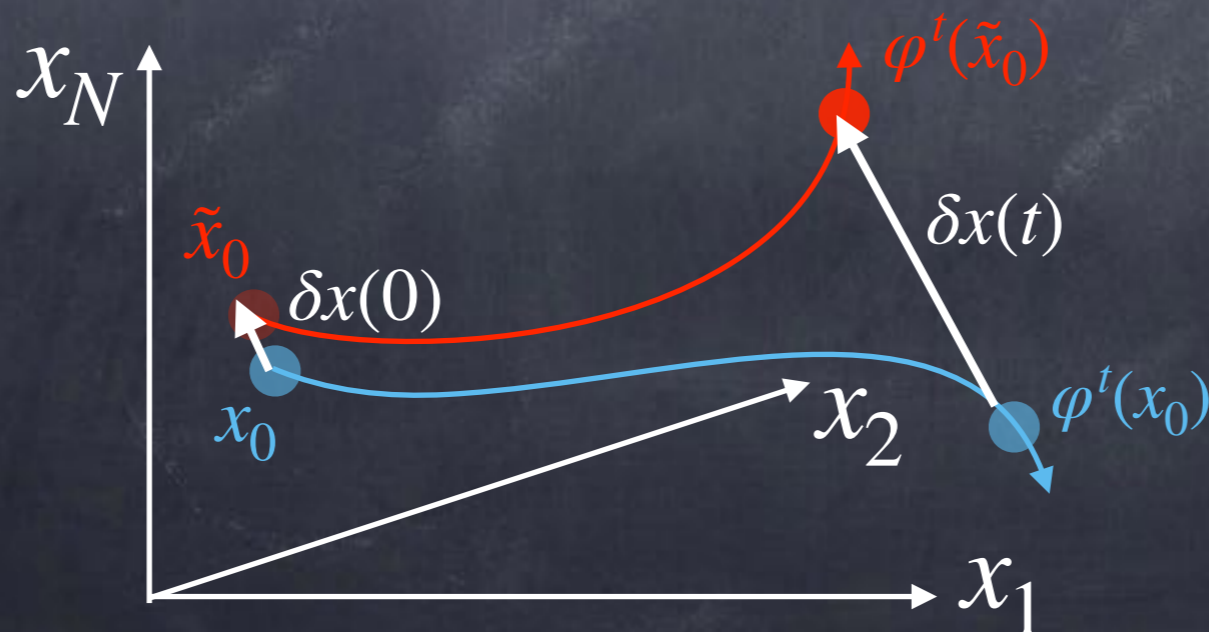
## ▶ カオス

- 決定論的力学系  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  ( $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N$ ) の有界領域における非周期軌道  $x(t) = \varphi^t(x_0)$  で初期値鋭敏性 ( $\lambda_1 > 0$ ) のあるもの.

## ▶ (最大) Lyapunov指数

- 誤差ベクトル  $\delta x(t)$  の指数的拡大率:  $\|\delta x(t)\| \propto \|\delta x(0)\| e^{\lambda_1 t}$

変分方程式  $\frac{d\delta x}{dt} = [Df_x]\delta x$  ( $[Df_x]_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ,  $(1 \leq i, j \leq N)$ ) とするとき,  $\lambda_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \frac{\|\delta x(T)\|}{\|\delta x(0)\|}$ .



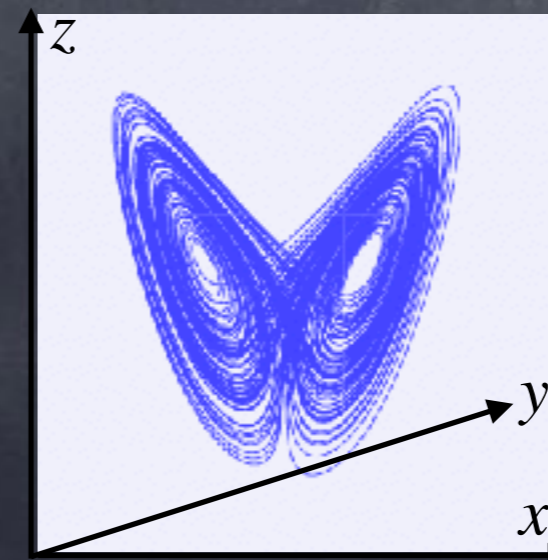
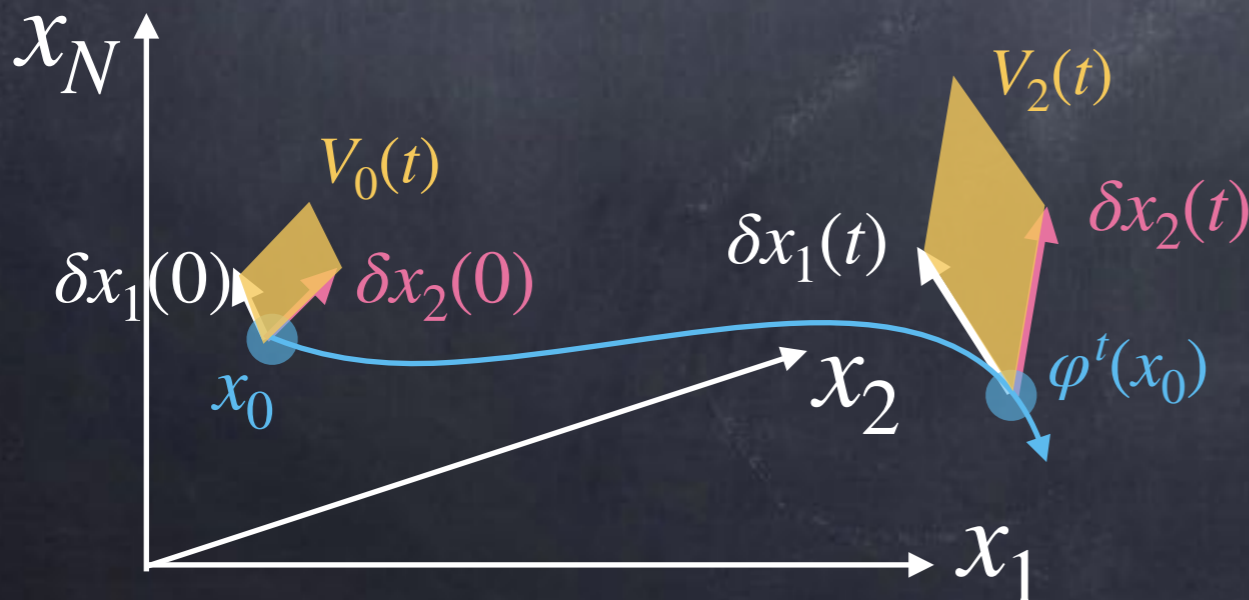
# Lyapunovスペクトルと次元

## ▶ Lyapunovスペクトル

- $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ):  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$  は  $n$ 次元体積の指数的增长率
- 例)  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ :  $V_2(t) = V_2(0)\exp((\lambda_1 + \lambda_2)t)$ ,  $V_2(t)$ は平行四辺形の面積

## ▶ Lyapunov次元

- Kaplan and Yorke (1979):  $d_L = \tilde{n} + \frac{\sum_{j=1}^{\tilde{n}} \lambda_j}{|\lambda_{\tilde{n}+1}|}$  ここで  $\tilde{n} := \max \left\{ k \mid \sum_{j=1}^k \lambda_j \geq 0 \right\}$
- ✓  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{\tilde{n}} \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_{\tilde{n}} + \lambda_{\tilde{n}+1} < 0$  ( $\because V_{\tilde{n}+1}(t) \rightarrow 0$ )



Lorenz系

$$d_L \simeq 2.06 (< 3)$$

# Blowout分岐と横断Lyapunov指数

## ▶ Example [1-3]

- 平面内の1粒子系 ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ )

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nu \mathbf{v}_x - \nabla V(\mathbf{x}) + (f_0 \sin \omega t) \mathbf{e}_x$$

ポテンシャル:  $V(x, y) = (1 - x^2)^2 + y^2(x - p) + ky^4$

( $\nu = 0.05, f_0 = 2.3, \omega = 3.5, k = 0.0025$ )

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, & \dot{v}_x = -\nu v_x + 4x(1 - x^2) + y^2 + f_0 \sin \omega t \\ \dot{y} = v_y, & \dot{v}_y = -\nu v_y - 2y(x - p) - 4ky^3 \end{cases}$$

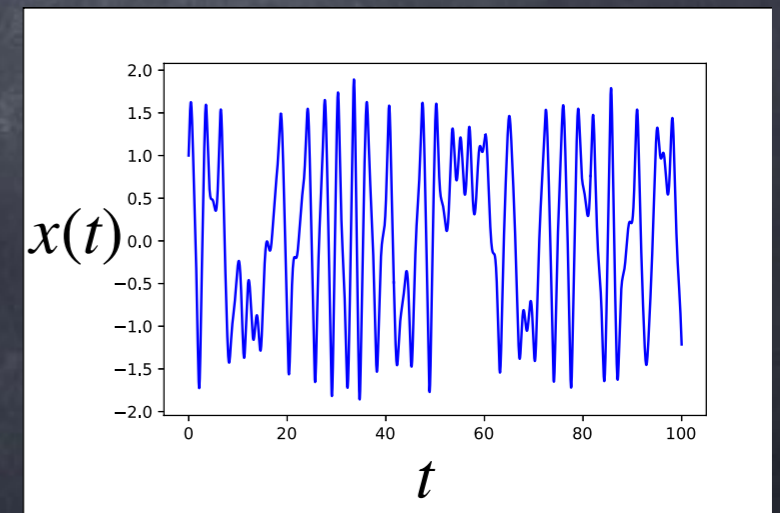
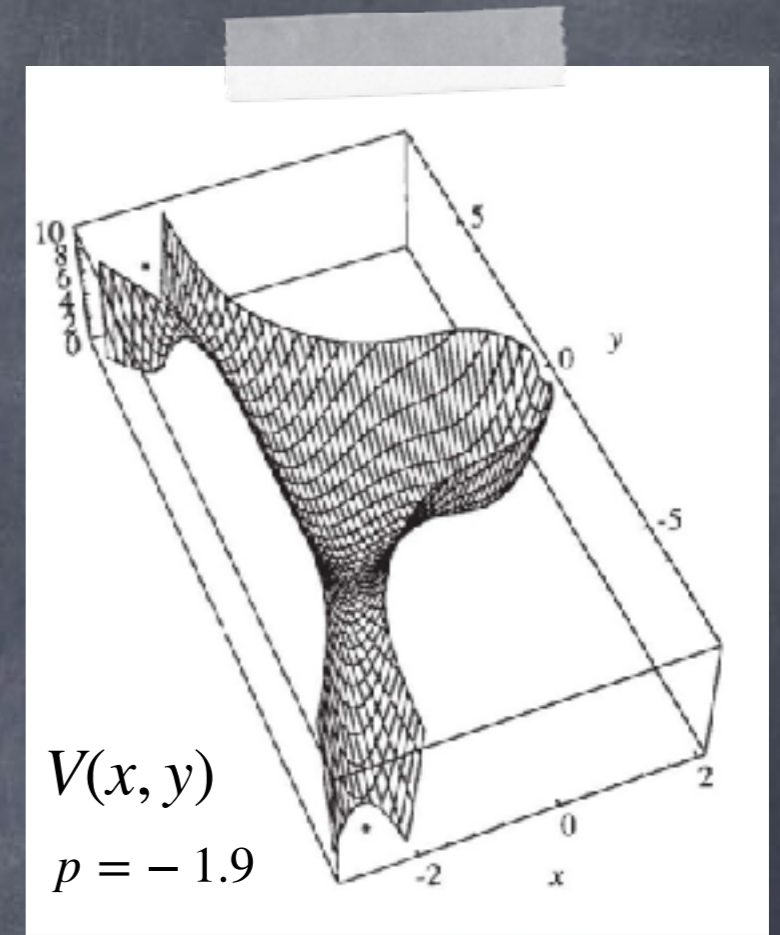
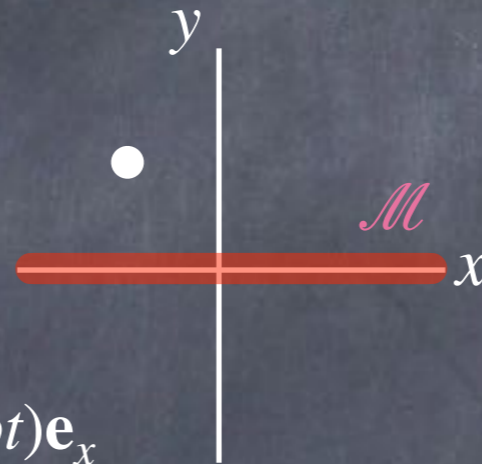
- 不変多様体  $\mathcal{M} := \{ (x, v_x, y, v_y, t) \mid y = v_y = 0 \}$

$\mathcal{M}$ 上のダイナミクスは“Duffing chaos”

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{v}_x = -\nu v_x + 4x(1 - x^2) + f_0 \sin \omega t$$

(※  $p$ によらない)

- $\mathbf{x}_0 \notin \mathcal{M}$ を初期値とする解のダイナミクスは？

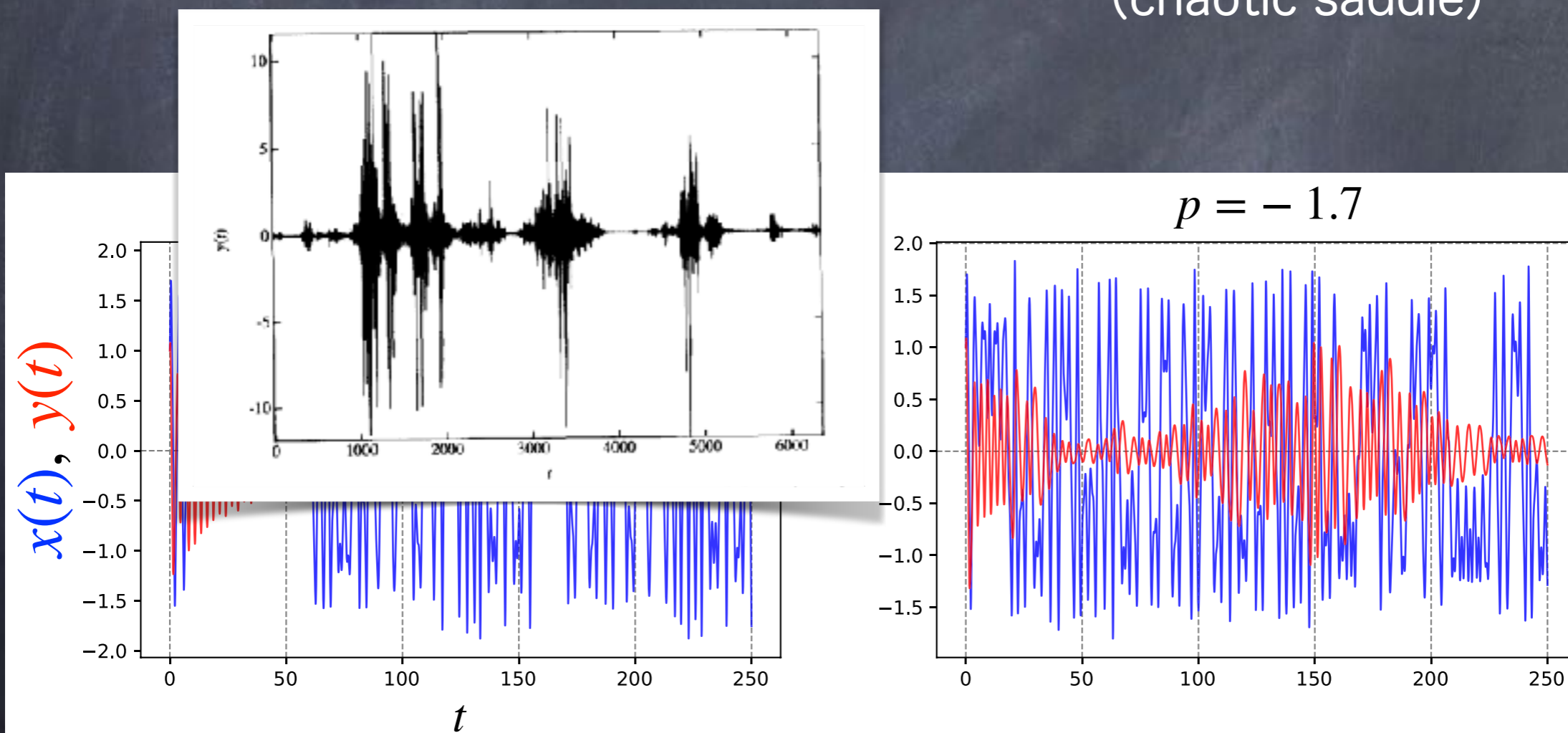


# Blowout分岐と横断Lyapunov指数

## ▶ Blowout分岐<sup>[3]</sup>

We use the term "blowout" because the feature of interest is a dramatic departure of the system state from the vicinity of the invariant manifold; the orbit is "blown out."

- $p = -2.0$  :  $\mathcal{M}$ 内の“Duffing chaos”がアトラクタ
- $p = -1.7$  :  $\mathcal{M}$ 内の“Duffing chaos”はアトラクタではなくなる (chaotic saddle)



# Blowout分岐と横断Lyapunov指数

## ▶ Blowout分岐の特徴付け[3]

### – 横断Lyapunov指数

$\mathcal{M}$ に横断方向の摂動 $(\delta y, \delta v_y)$ に対する安定性を定量化

### – 変分方程式： $\delta \dot{y} = \delta v_y, \delta \dot{v}_y = -\nu \delta v_y - 2\delta y(x - p)$

(cf.  $\dot{y} = v_y, \dot{v}_y = -\nu v_y - 2y(x - p) - 4ky^3$ )

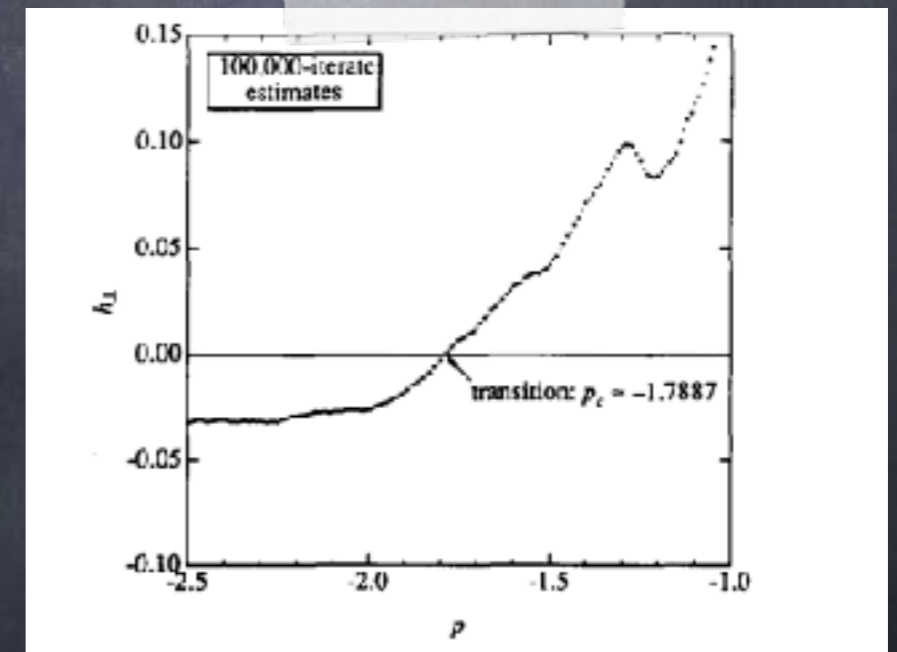
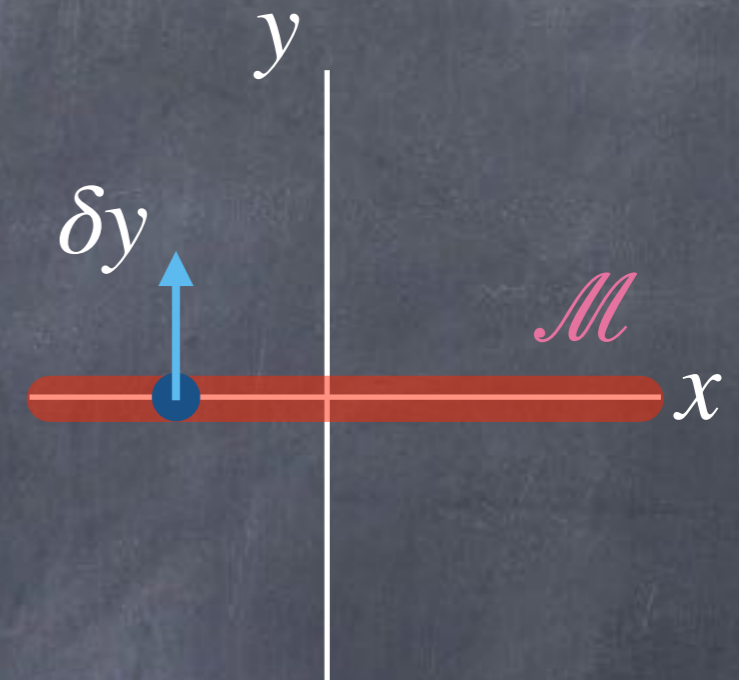
### – 横断Lyapunov指数 $\lambda_{\perp}$

$$\lambda_{\perp} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \frac{\delta(T)}{\delta(0)}$$

$$\left( \delta(t) = \sqrt{[\delta y(t)]^2 + [\delta v_y(t)]^2} \right)$$

### – $p_c = -1.7887$ で $\lambda_{\perp}$ の符号が変化

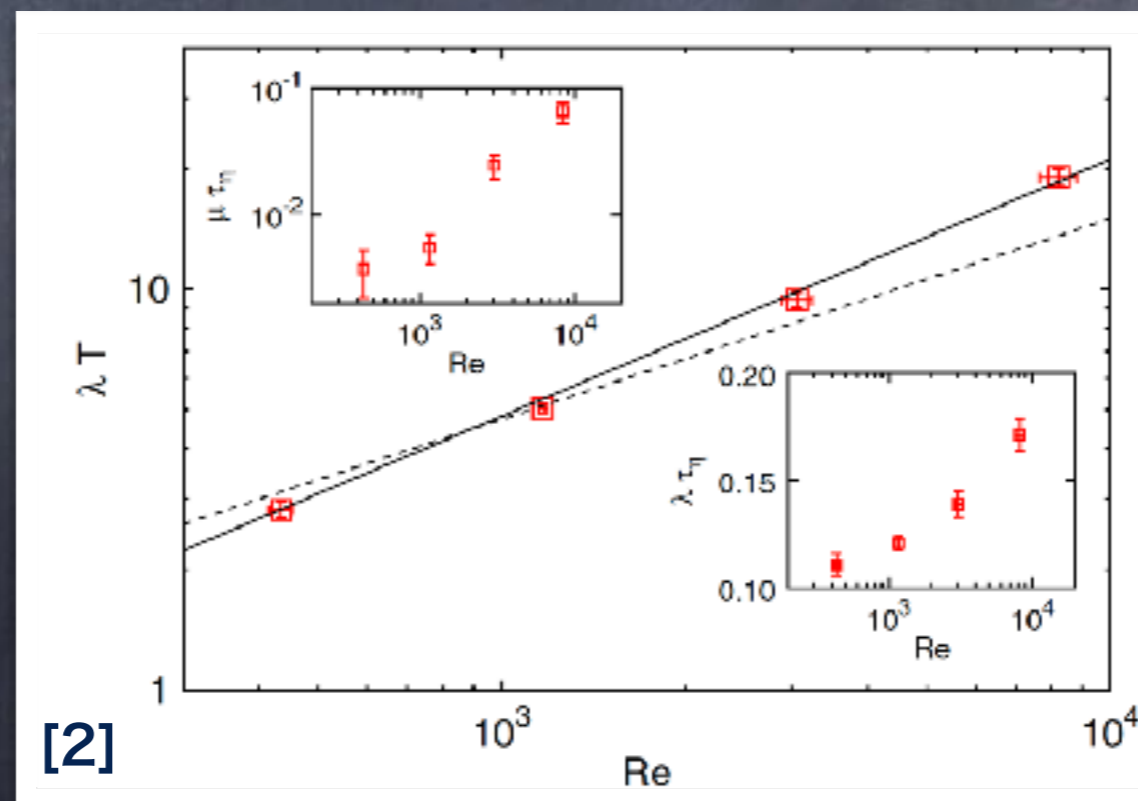
- $p < p_c$ であれば $\lambda_{\perp} < 0$ ,  $\mathcal{M}$ は漸近安定



# 乱流の力学系的解釈

## ▶ 乱流 ⊂ NSEによって定まる力学系のカオス

- 乱流のLyapunov指数： $\lambda \propto \tau^{-1}$  ( $\tau = (\nu/\epsilon)^{1/2}$ : Kolmogorov time)<sup>[1]</sup>
- 近年の数値的研究 (DNS) <sup>[2-4]</sup>： $\lambda\tau$ はわずかにRe数に依存して増大  
“we find that it increases with the Reynolds number, but surprisingly faster than what is predicted on dimensional grounds”<sup>[2]</sup>



[1] Ruelle, Phys. Lett. A 72 (1979)

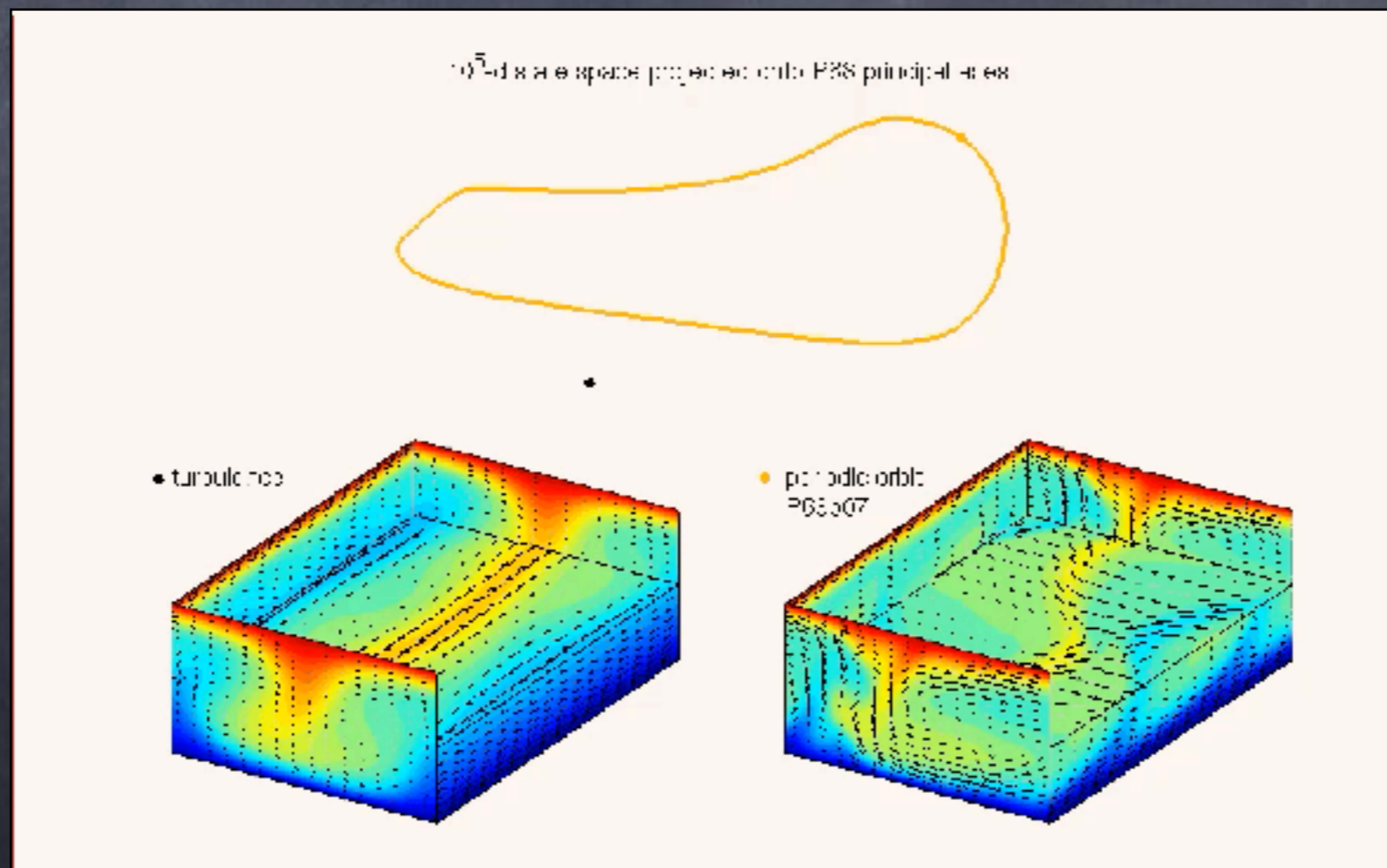
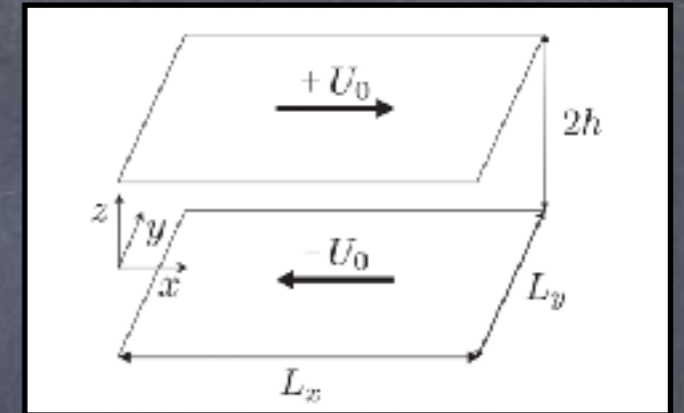
[2] Boffetta and Musacchio, PRL 119 (2017)

[3] Mohan, Fitzsimmons, and Moser, PRF 2 (2017)

[4] Arjun and Ho, PRL 120 (2018)

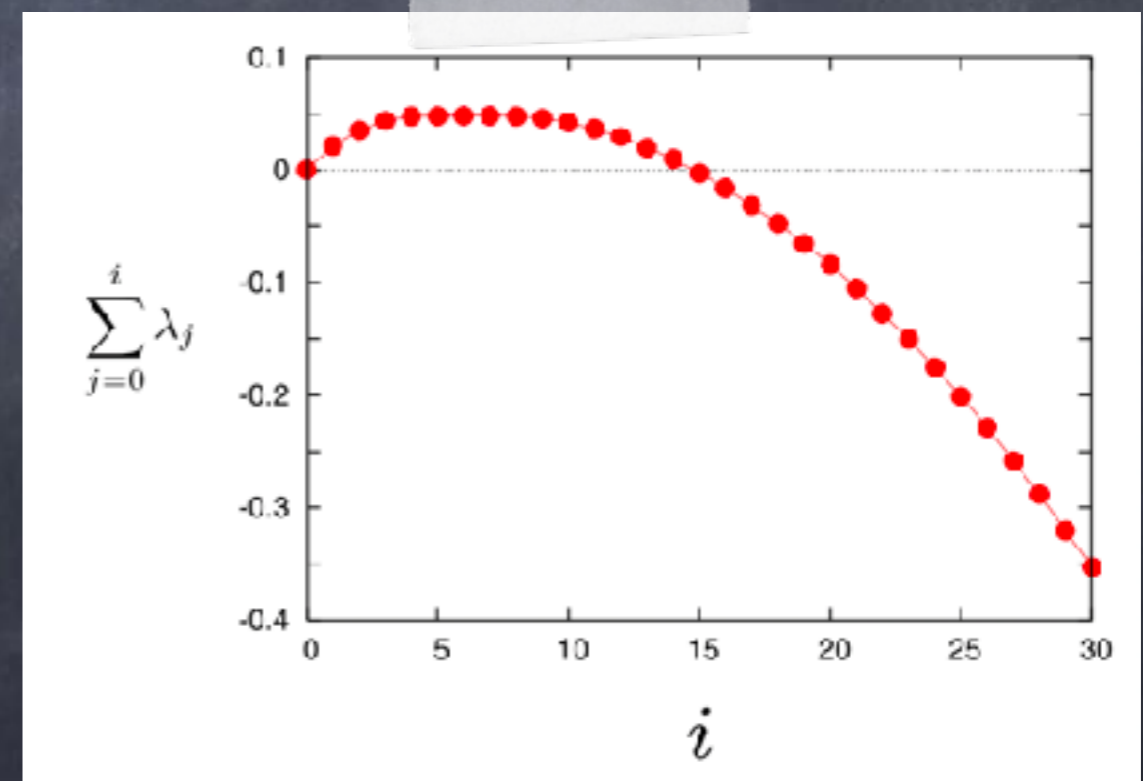
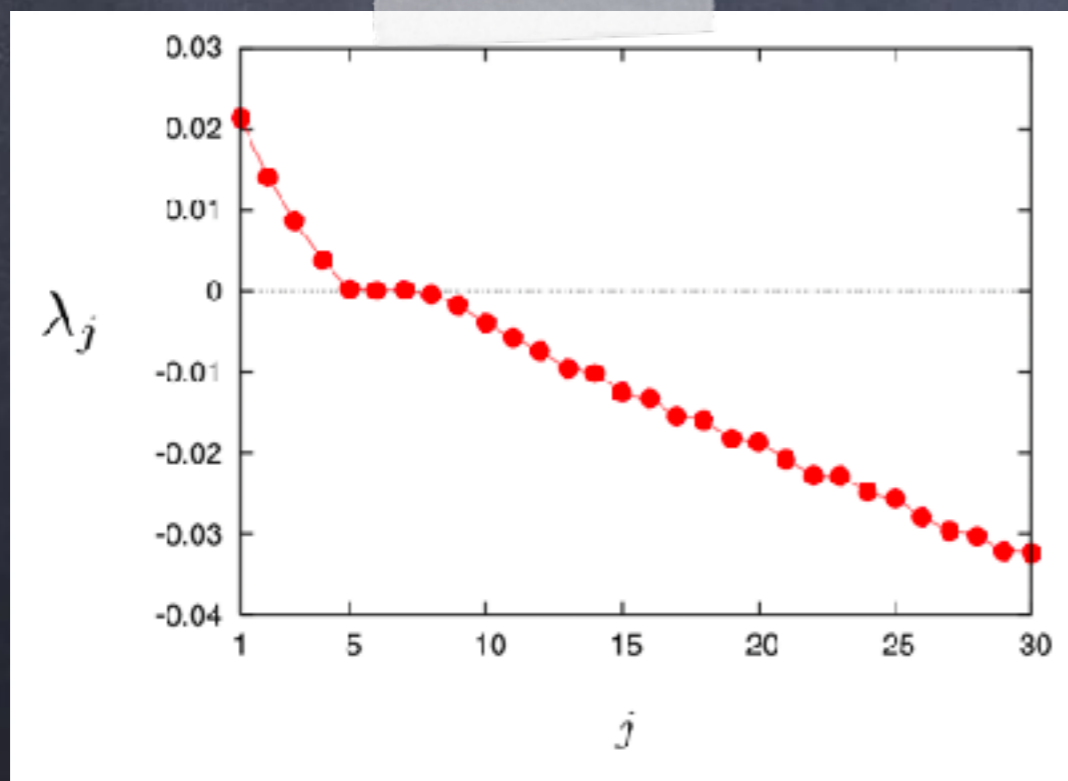
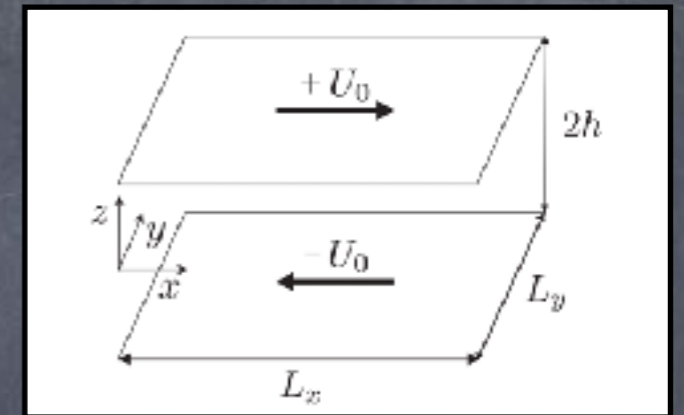
# (例) クエット乱流のLyapunov解析

- ▶ 平行平板間に起こる典型的な乱流  
( $\pm U_0$ で移動する上下平板によって駆動)
- ▶ 力学系の次元： $d = \mathcal{O}(10^5)$  (cf.  $Re = 400$ , MFU)



# (例) クエット乱流のLyapunov解析

- ▶ 平行平板間に起こる典型的な乱流  
( $\pm U_0$ で移動する上下平板によって駆動)
- ▶ 力学系の次元： $d = \mathcal{O}(10^5)$  (cf.  $Re = 400$ , MFU)
- ▶ アトラクタ次元<sup>[1]</sup>： $d_L = 14.8 \ll \mathcal{O}(10^5)$



[1] M. Inubushi, S. Takehiro, and M. Yamada, Phys. Rev. E 92.2 (2015): 023022.



# おしながき

## ▶ カオスと乱流

- カオスとLyapunov指数, Lyapunov次元
- Blowout分岐と横断Lyapunov指数
- 乱流の力学系的解釈

## ▶ データ駆動型乱流研究

- MLによる乱流モデルの低次元化限界 (Lyapunov次元) [1]
- 乱流の小スケール渦の隷属性とデータ同化限界 (横断Lyapunov指数) [2]

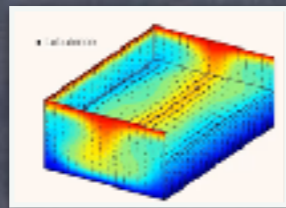
## ▶ まとめ

[1] Linot and Graham, Dynamics of a data-driven low-dimensional model of turbulent minimal Couette flow, J. Fluid Mech. 973, A42 (2023).

[2] Inubushi, Saiki, Kobayashi, and Goto, Characterizing small-scale dynamics of Navier-Stokes turbulence with transverse Lyapunov exponents: A data assimilation approach, Phys. Rev. Lett. 131, 254001 (2023).

# データ駆動型低次元モデル

- ニューラルネット (autoencoder, Neural ODE, etc.) を用い写像  $\chi, \hat{\chi}, g$  を近似することで, ミニマルクエット乱流の低次元化モデル ( $d_h \ll d$ ) を構成.



$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$$

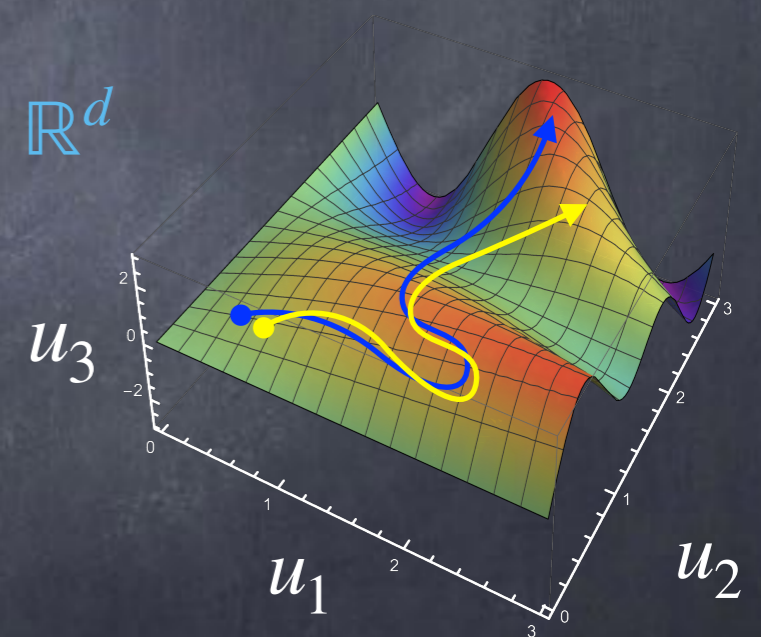
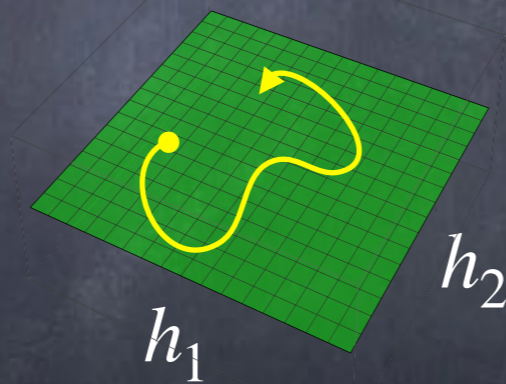
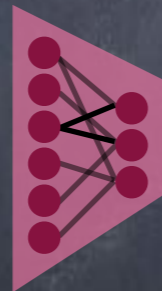
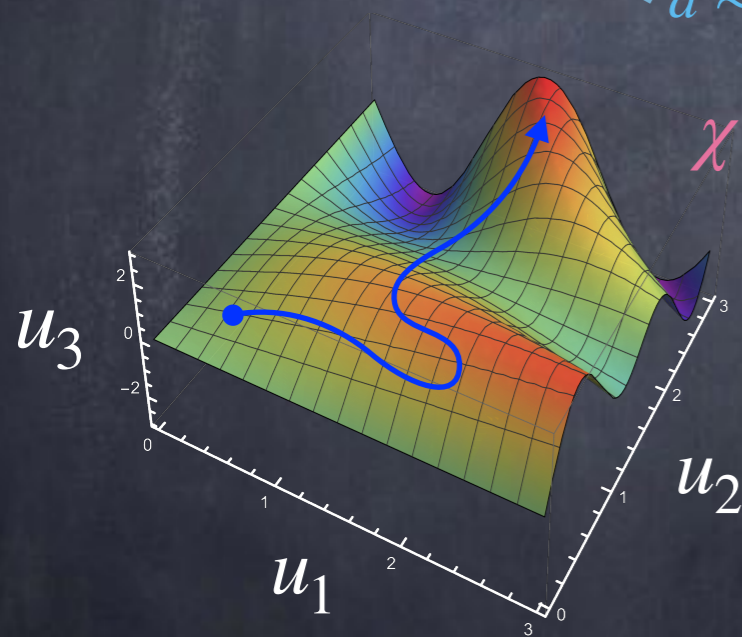
$d \sim O(10^5)$

$$\mathbf{h} = \chi(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{d_h}$$

$$\hat{\chi}(\chi(\mathbf{u})) \in \mathbb{R}^d$$

$$\chi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_h}$$

$$\hat{\chi}: \mathbb{R}^{d_h} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

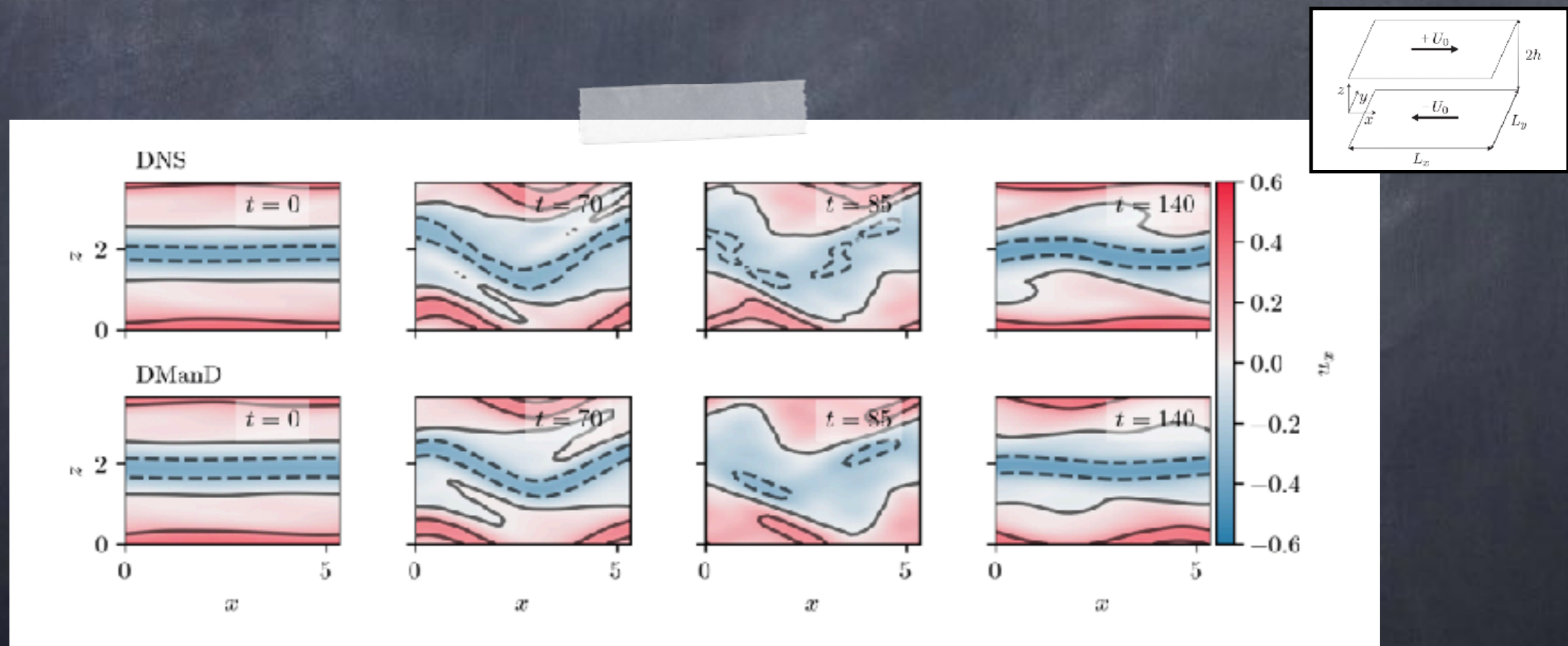


$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f(\mathbf{u})$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = g(\mathbf{h})$$

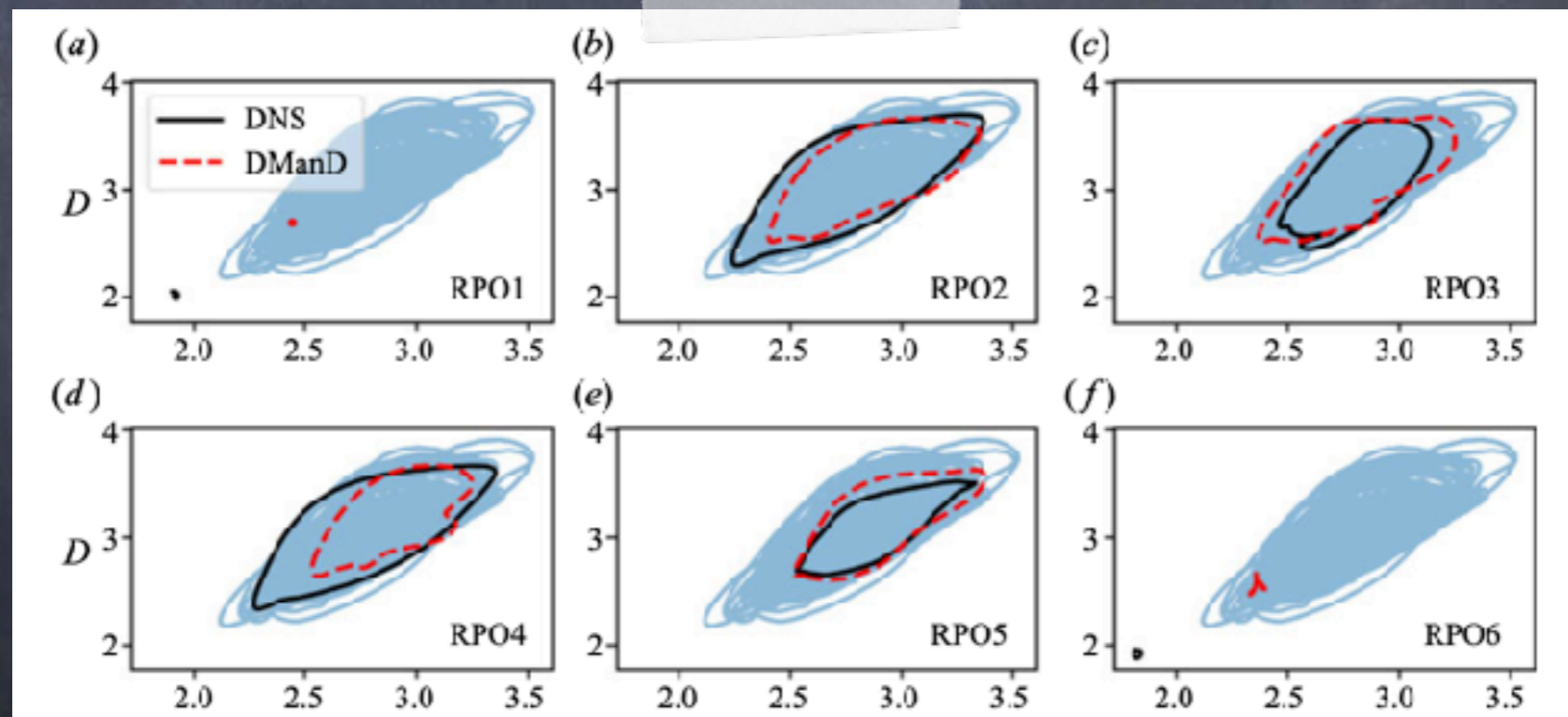
# データ駆動型低次元モデル

- ▶ ニューラルネット (autoencoder, Neural ODE, etc.) を用い写像  $\chi, \hat{\chi}, g$  を近似することで低次元化モデル ( $d_h \ll d$ ) を構成.
- ▶ 低次元モデルで典型的な時間変動 (SSP), 統計量を再現



# データ駆動型低次元モデル

- ▶ ニューラルネット (autoencoder, Neural ODE, etc.) を用い写像  $\chi, \hat{\chi}, g$  を近似することで低次元化モデル ( $d_h \ll d$ ) を構成.
- ▶ 低次元モデルで典型的な時間変動 (SSP), 統計量を再現
- ▶ 低次元モデルでUPOを探索し, NSEのUPOsを新たに発見

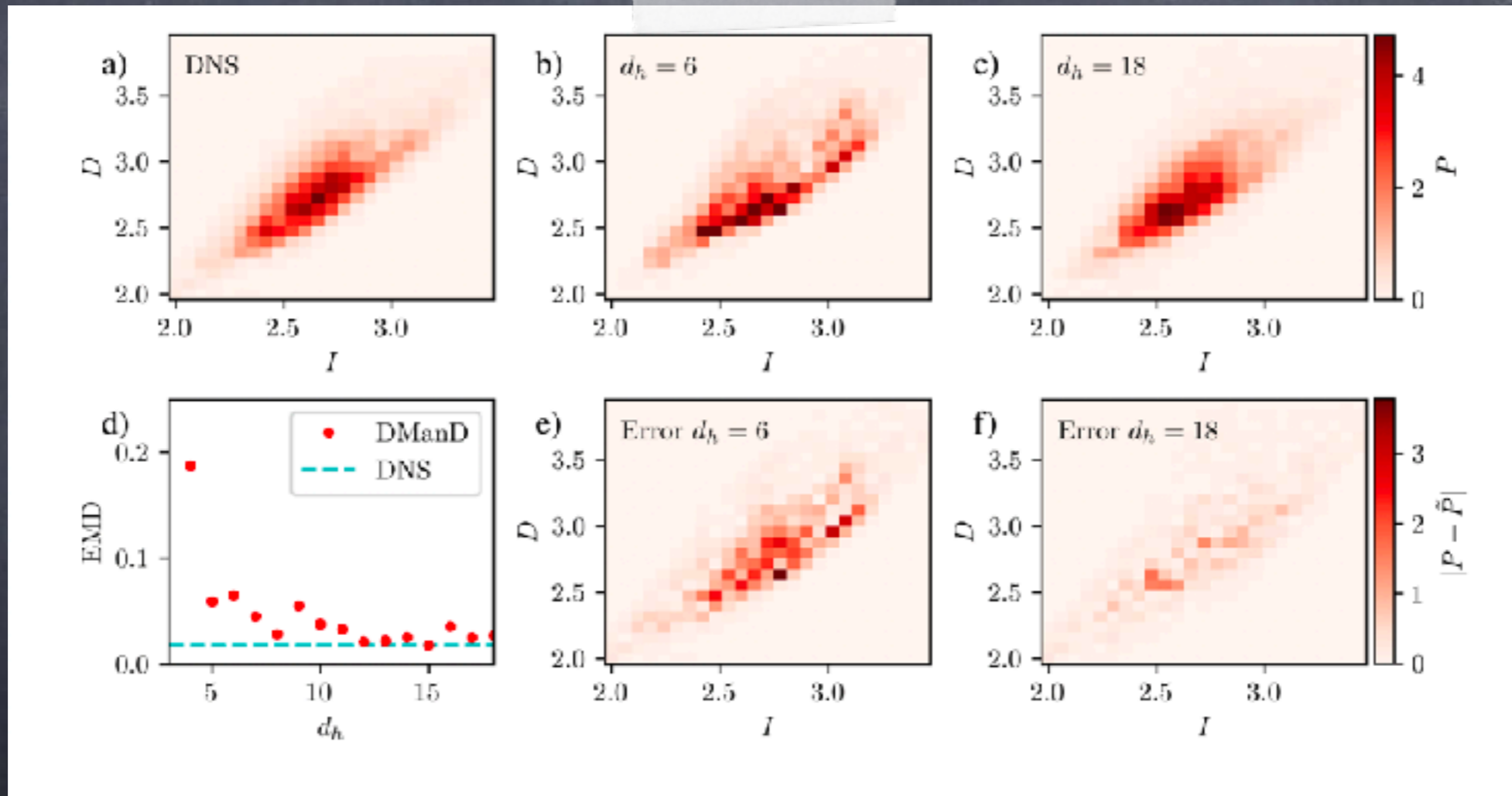


エネルギー注入率 $I$ と散逸率 $D$

Linot and Graham, Dynamics of a data-driven low-dimensional model of turbulent minimal Couette flow, J. Fluid Mech. 973, A42 (2023).

# 低次元化とその限界

- ▶ 自由度  $\mathcal{O}(10^5)$  のDNSが“15個の有効自由度”でモデル化可能  
“after  $d_h \gtrsim 15$  the joint PDFs are in excellent agreement with the DNS”.

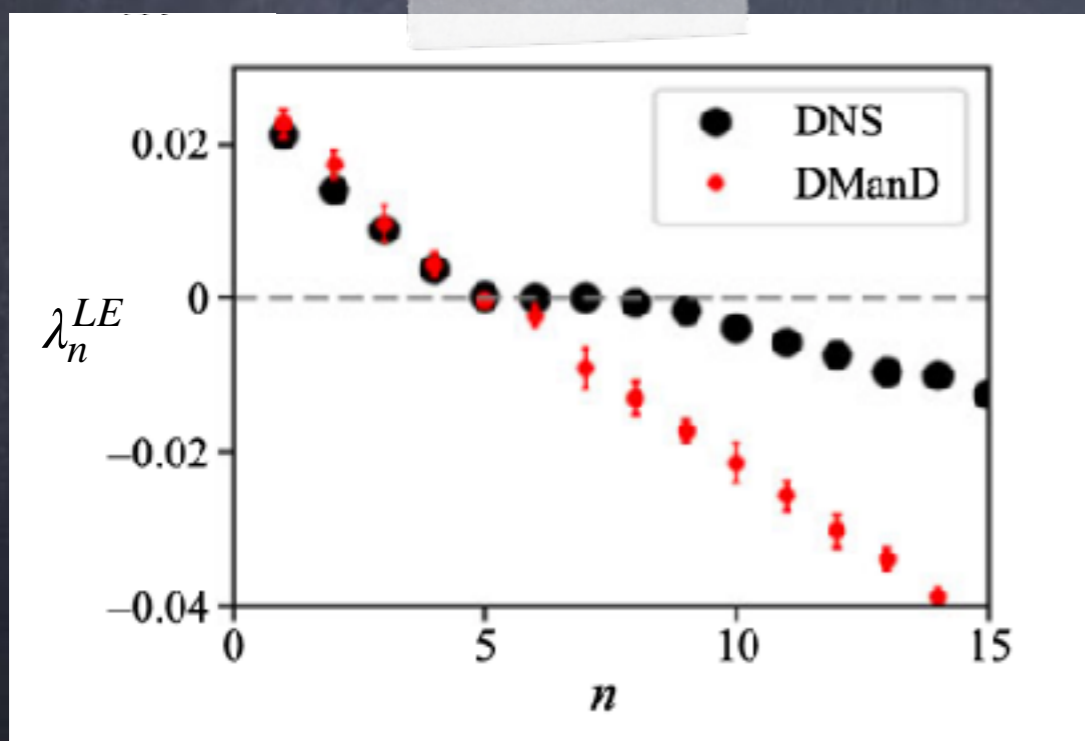


エネルギー注入率 $I$ と散逸率 $D$ の確率密度関数: $P(I, D)$

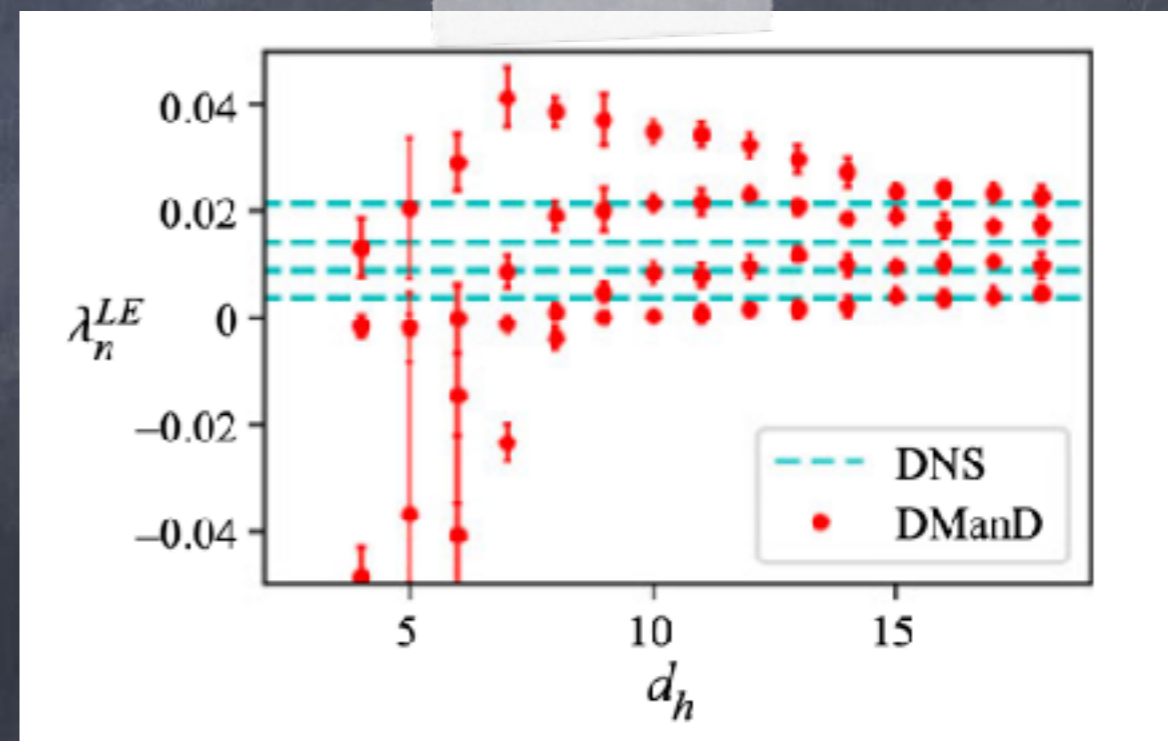
Linot and Graham, Dynamics of a data-driven low-dimensional model of turbulent minimal Couette flow, J. Fluid Mech. 973, A42 (2023).

# 低次元化とその限界

- ▶ 乱流の予測不可能性の起源である軌道不安定性, 特に正のLyapunov指数  $\lambda_n^{LE}$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ )まで定量的に近似可能.
- ▶ ただし, やはり  $d_h \gtrsim 15$ は必要 (低次元化の限界).



Lyapunov指数  $\lambda_n^{LE}$  ( $d_h = 18$ 固定)

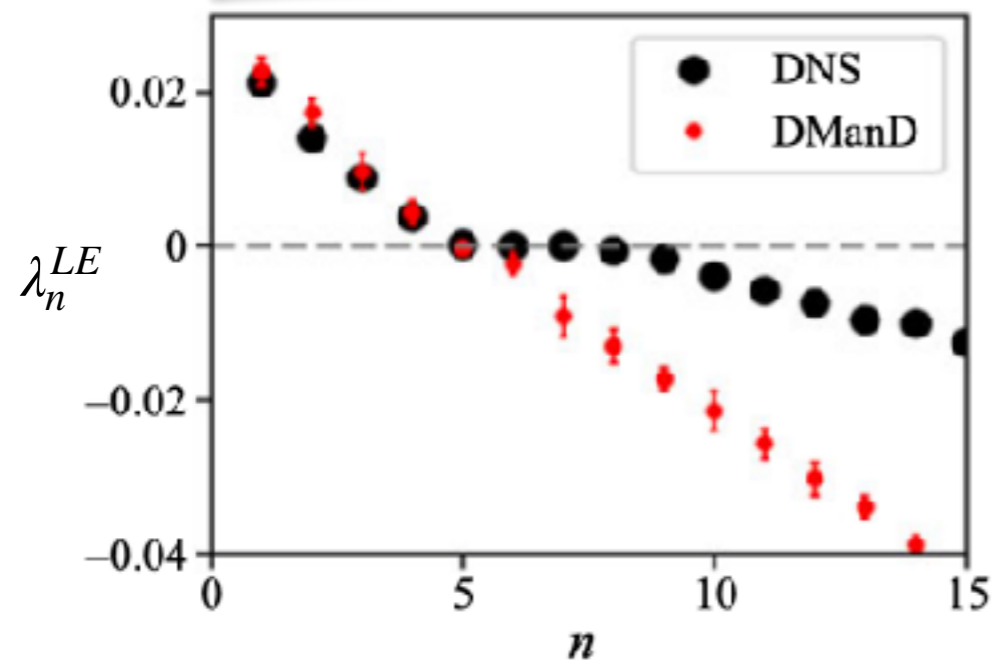


正のLyapunov指数  $\lambda_n^{LE}$  の  $d_h$  依存性

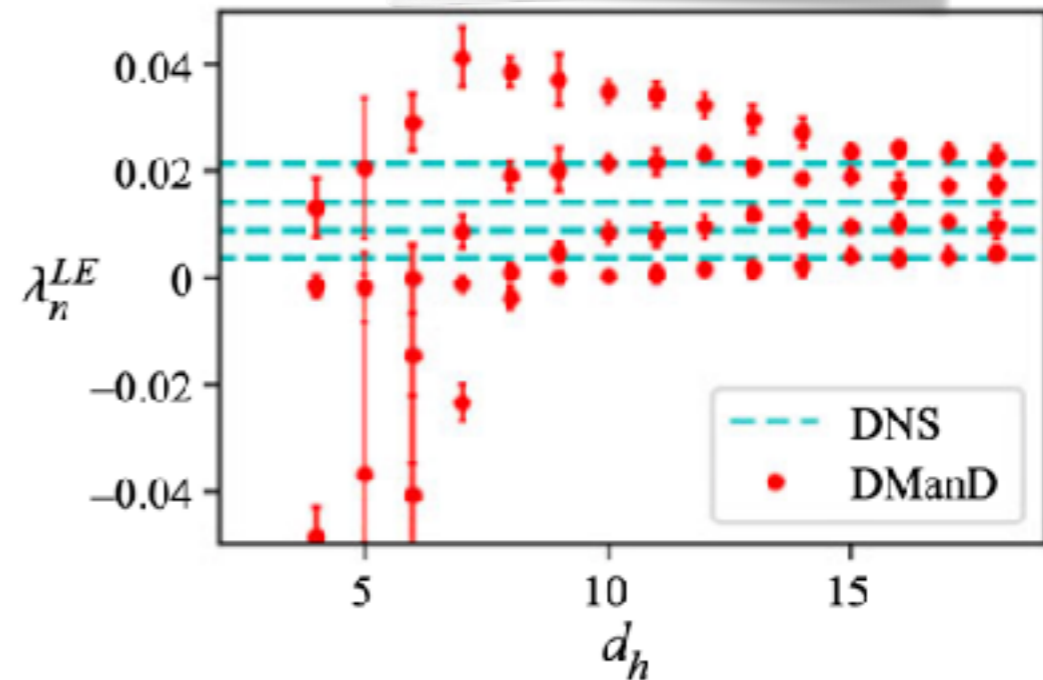
# 低次元化とその限界

- ▶ MLによる低次元化限界はNSEのアトラクタ次元が決定  
(力学系的性質によって理解可能 / 限界と可能性の示唆)

An interesting observation is that the DManD models appear to accurately capture the statistics of the DNS for  $d_h \gtrsim 15$ , and Inubushi *et al.* (2015) reported a Lyapunov dimension of 14.8. The close agreement between this fractal dimension and the dimension at which our models perform well further supports that, in theory, for the models with  $d_h \gtrsim 15$  we have a sufficient number of dimensions to ‘exactly’ parameterise the manifold on which the dynamics lie.



Lyapunov指数  $\lambda_n^{LE}$  ( $d_h = 18$ 固定)



正のLyapunov指数  $\lambda_n^{LE}$  の  $d_h$  依存性

Linot and Graham, Dynamics of a data-driven low-dimensional model of turbulent minimal Couette flow, J. Fluid Mech. 973, A42 (2023).

# おしながき

## ▶ カオスと乱流

- カオスとLyapunov指数, Lyapunov次元
- Blowout分岐と横断Lyapunov指数
- 乱流の力学系的解釈

## ▶ データ駆動型乱流研究

- MLによる乱流モデルの低次元化限界 (Lyapunov次元) [1]
- 乱流の小スケール渦の隷属性とデータ同化限界 (横断Lyapunov指数) [2]

## ▶ まとめ

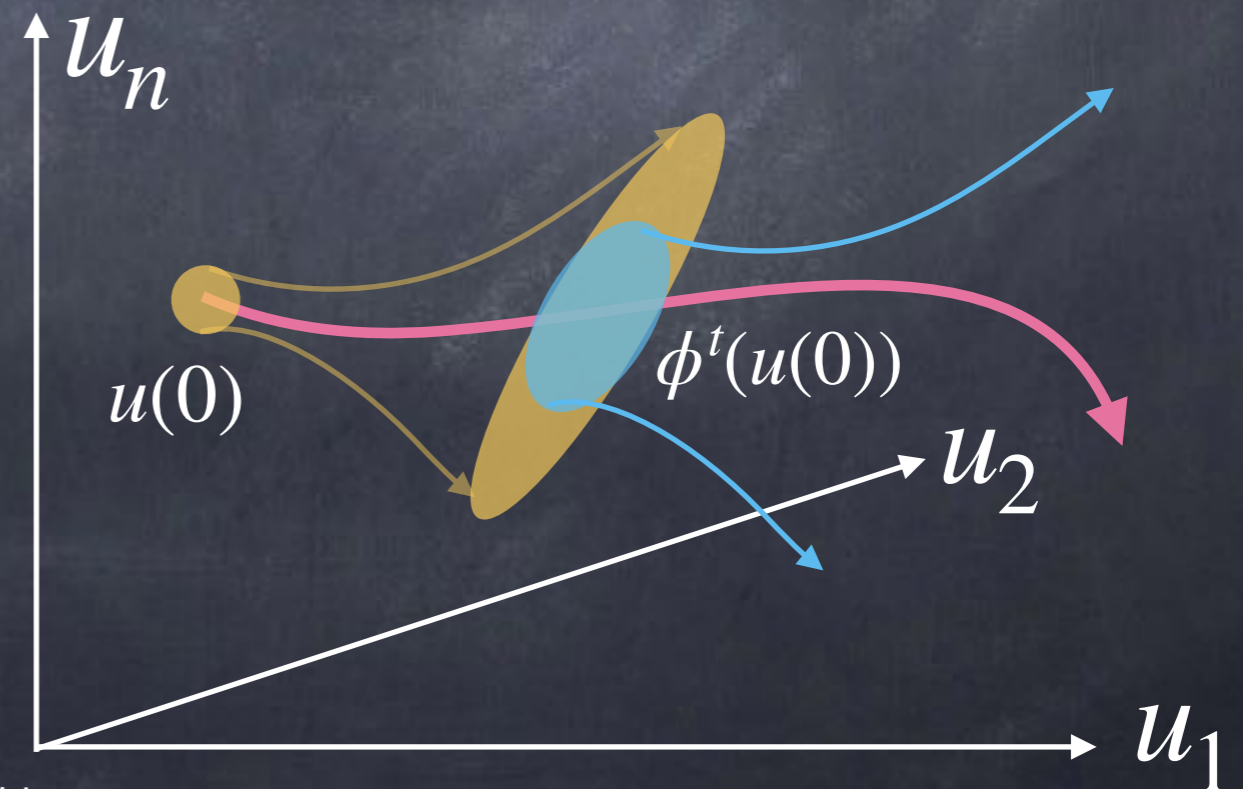
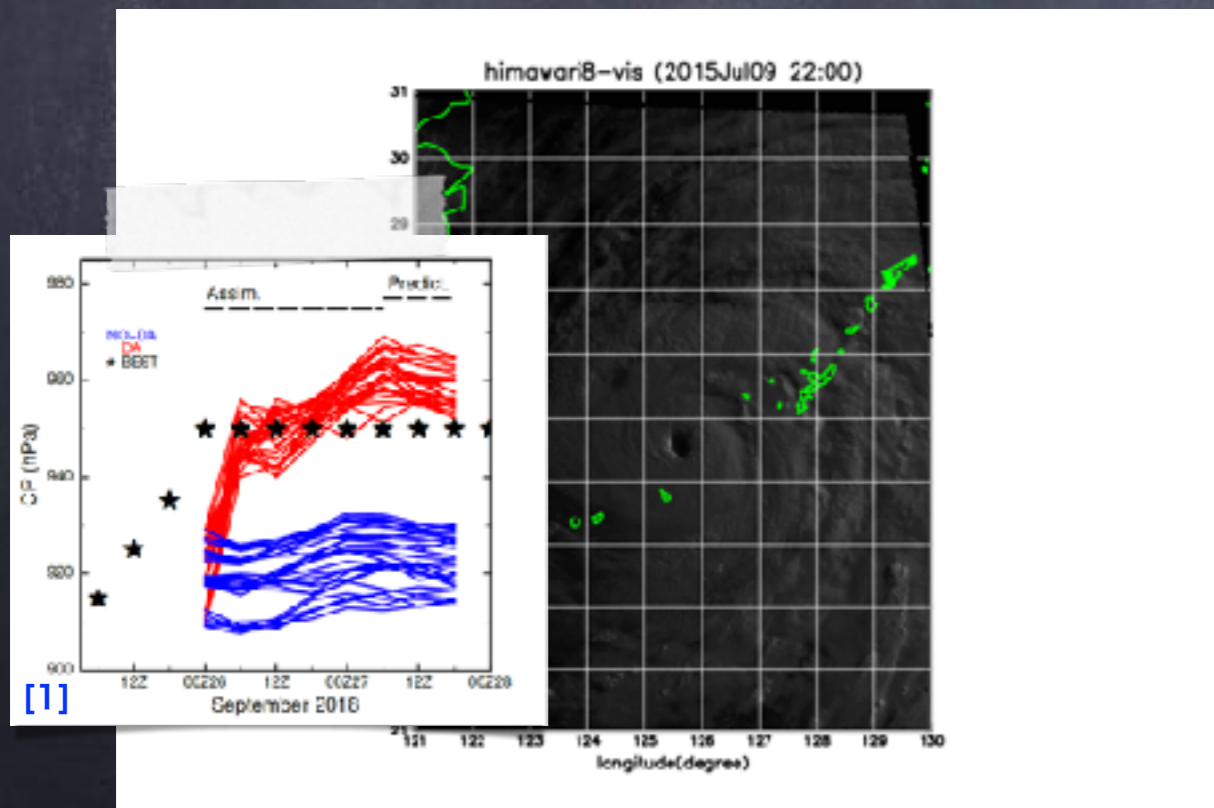
[1] Linot and Graham, Dynamics of a data-driven low-dimensional model of turbulent minimal Couette flow, J. Fluid Mech. 973, A42 (2023).

[2] Inubushi, Saiki, Kobayashi, and Goto, Characterizing small-scale dynamics of Navier-Stokes turbulence with transverse Lyapunov exponents: A data assimilation approach, Phys. Rev. Lett. 131, 254001 (2023).



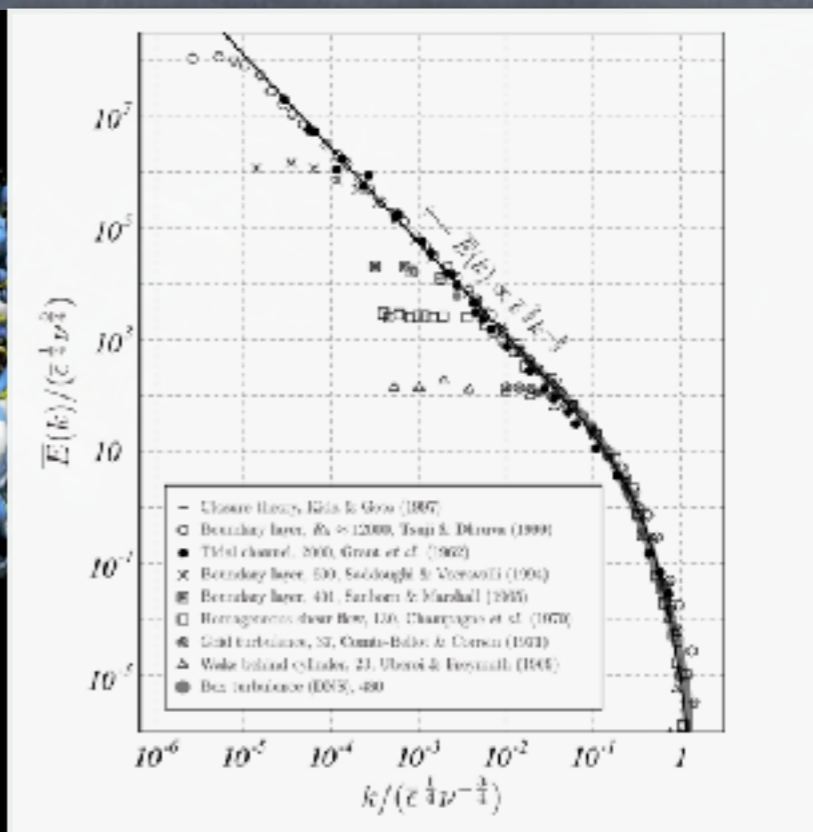
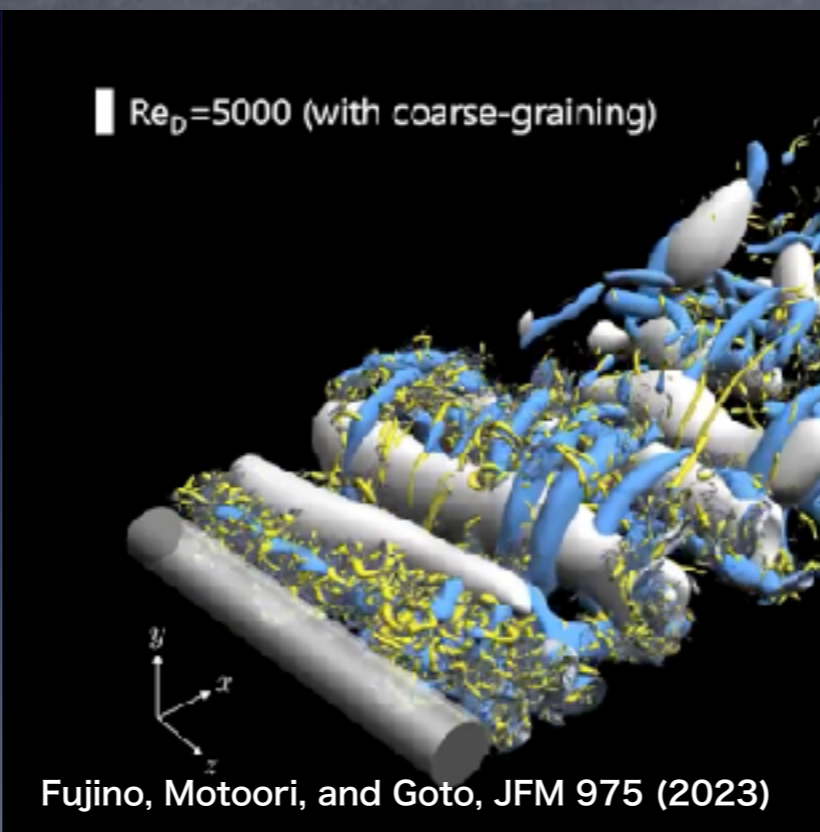
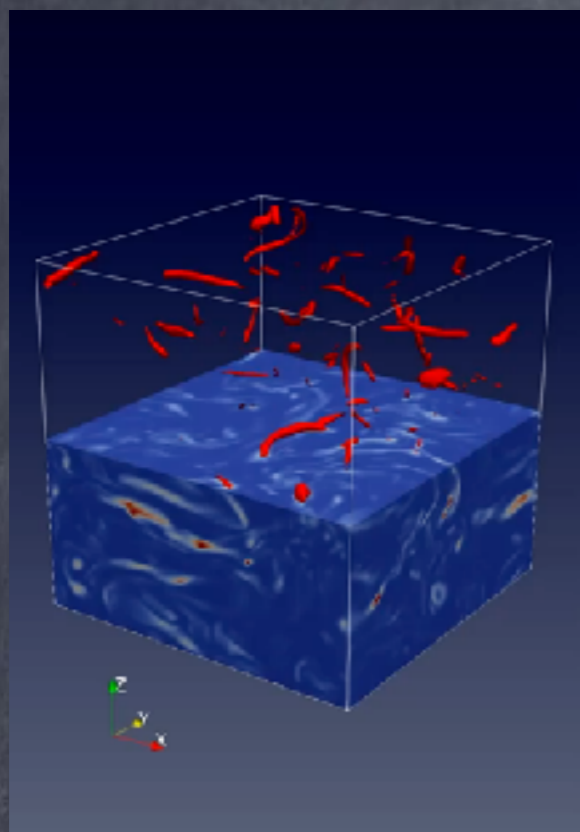
# データ同化(DA)

- ▶ 力学モデル+観測データ⇒状態推定の高精度化
  - シミュレーションを用いた予測においては必須
- ▶ 乱流におけるDAの（軌道）安定性による理解？
  - 不確定性の指数的増大 vs. DA



[1] 辻野智紀, データ同化による気象衛星ひまわり8号風速推定データの台風強度予報へのインパクト

# 乱流の渦構造とDA



後藤 晋「発達した乱流—エネルギーカスケードをめぐって」  
(日本物理学会誌, 73巻, 2018)

## ▶ DAの目標：乱流の小スケール構造の推定

— エネルギーカスケードの素課程 (cf. Goto, Saito, and Kawahara, (2017))

大スケール構造のデータを用いて、  
小スケール構造の推定は可能？条件/Raynolds数依存性？

# DAの問題設定

## 準備

-  $u$  (true),  $\tilde{u}$  (approx.)

- 分解:  $u = p + q$ ,  $\tilde{u} = \tilde{p} + \tilde{q}$ ,

$$\left( p := \sum_{|\mathbf{k}| < k_a} \hat{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad q := \sum_{|\mathbf{k}| \geq k_a} \hat{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right).$$

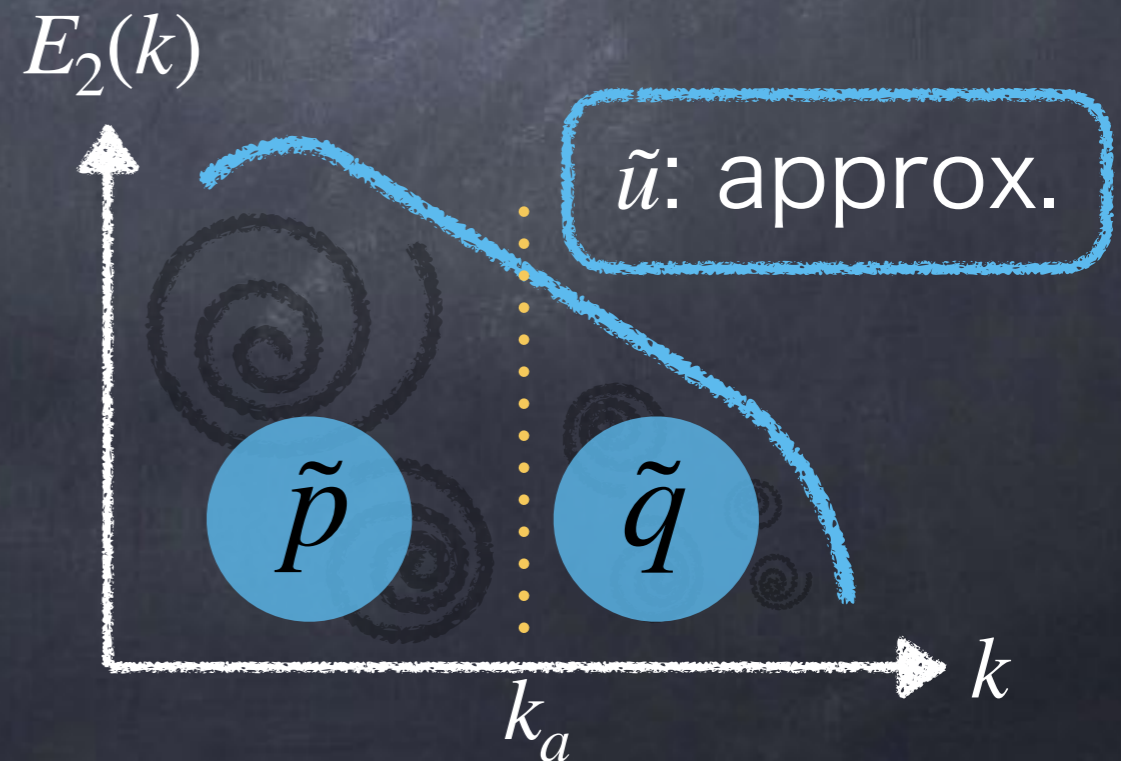
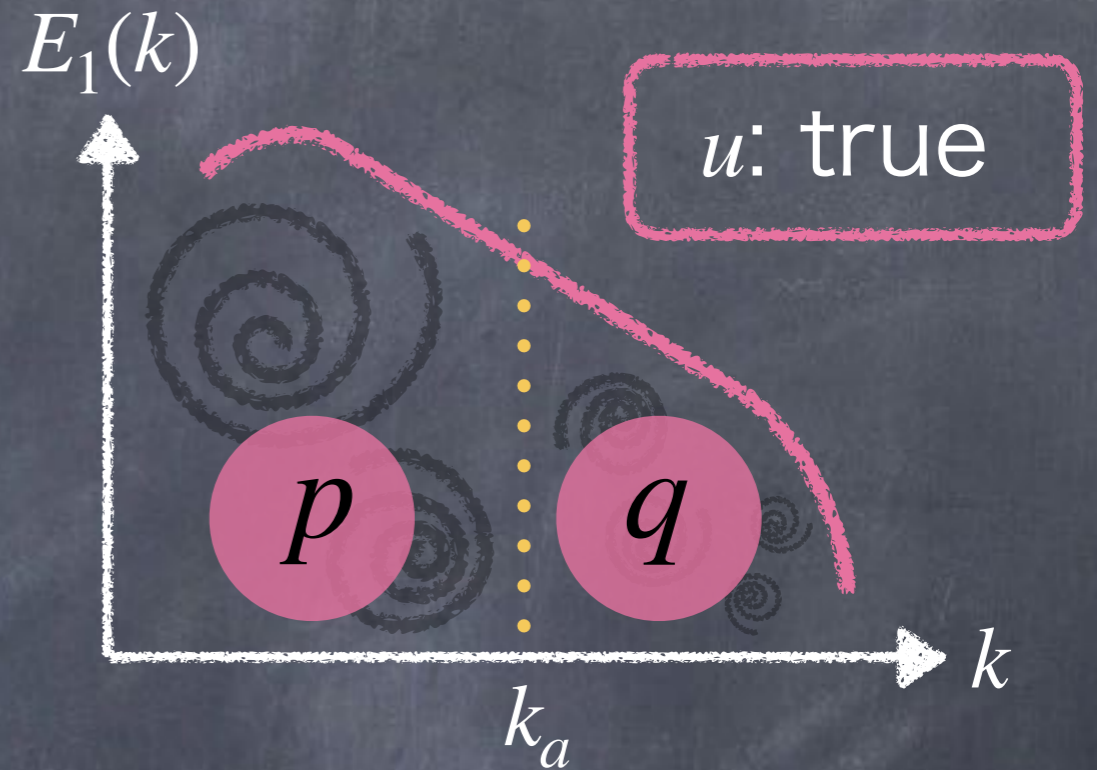
-  $u$ はNSEの解:

$$\frac{dp}{dt} = F(p, q), \quad \frac{dq}{dt} = G(p, q)$$

## 仮定

-  $p(t)$  ( $\forall t \geq 0$ )は使用可能 (観測可能)

- 観測誤差・モデル化誤差なし



# DAの問題設定

▶ 目標： $q(t)$ の推定

▶ 連続DA（直接置換法）

-  $\tilde{p}(t) \equiv p(t) \quad (\forall t \geq 0)$

-  $\frac{d\tilde{q}}{dt} = G(p, \tilde{q})$

$$\left( \frac{dp}{dt} = F(p, q), \quad \frac{dq}{dt} = G(p, q) \right)$$

▶ 先行研究

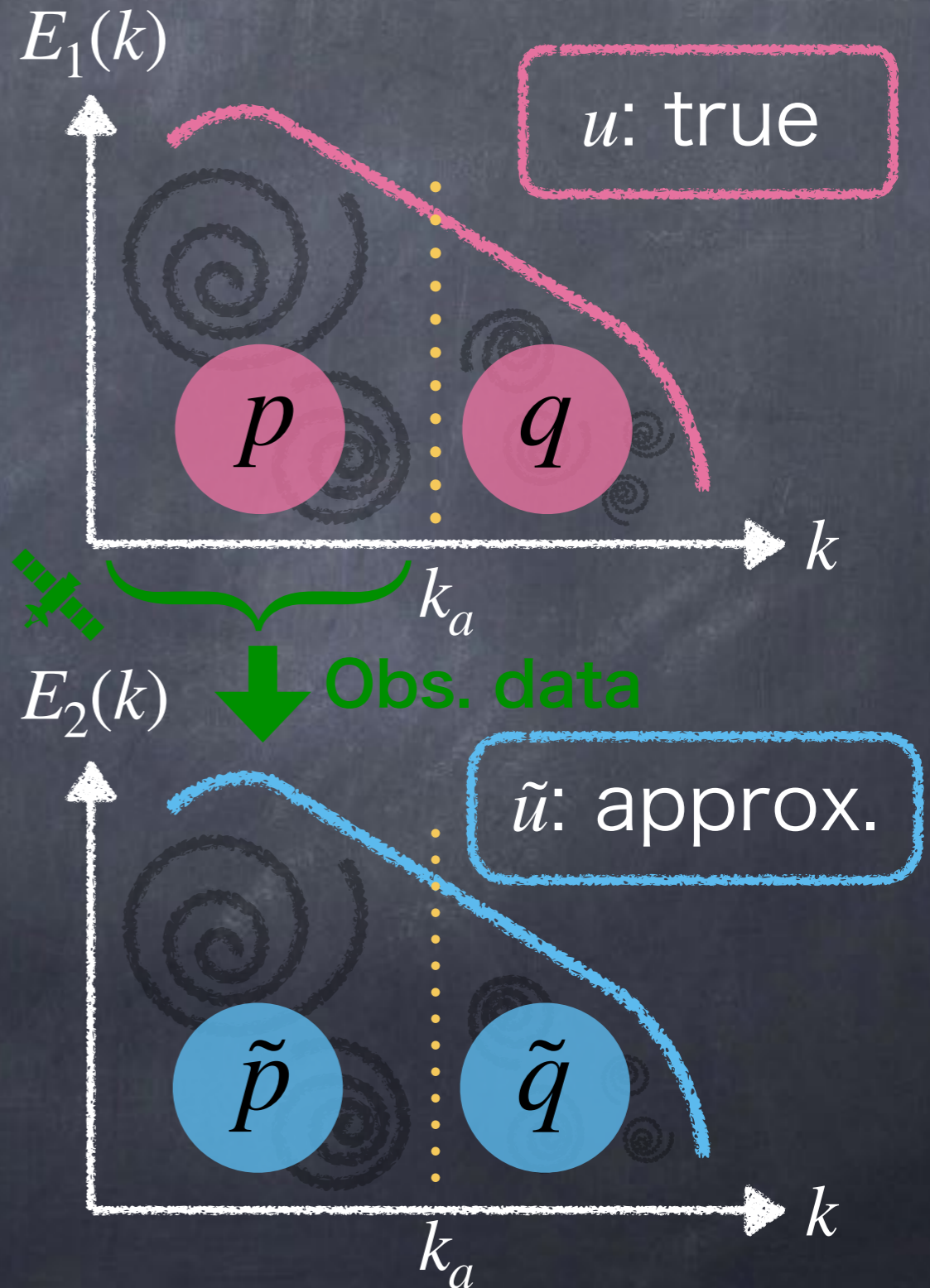
Kolmogorov長

-  $k_a > 0.2/\eta$  (十分な大スケールの情報があれば)

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

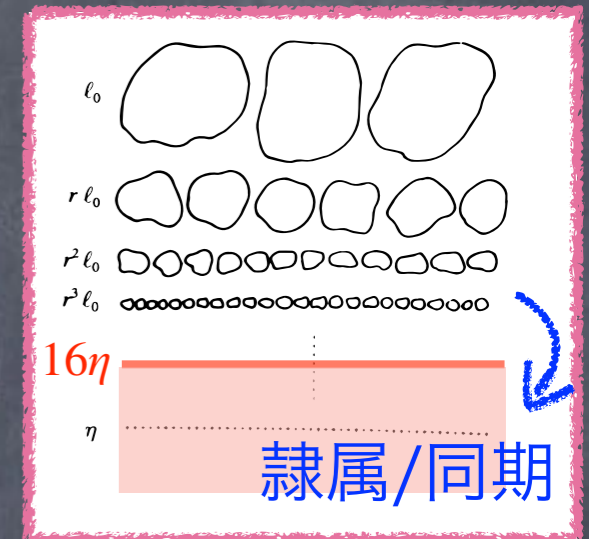
$$\therefore \|q(t) - \tilde{q}(t)\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

DA成功 (小スケールは隸属/同期)



# 先行研究

- ▶ Yoshida, Yamaguchi, and Kaneda, PRL (2005)
  - 直接置換DA・非定常外力 (negative viscosity)
- ▶ Lalescu, Meneveau, and Eyink, PRL (2013)
  - 直接置換DA・定常外力(Kolmogorov)・直方体領域
- ▶ Zhang, Dong, and Abdullah, JFM (2020)
  - 4次元変分DA (4DVAR) ・定常外力(Kolmogorov)
- ▶ Leoni, Mazzino, and Biferale, PRX (2020)
  - Fourier nudging DA・ランダム非定常外力



DAのアルゴリズムや外力の詳細によらずに,

$k_a\eta > 0.2$ であれば小スケールは隷属化.

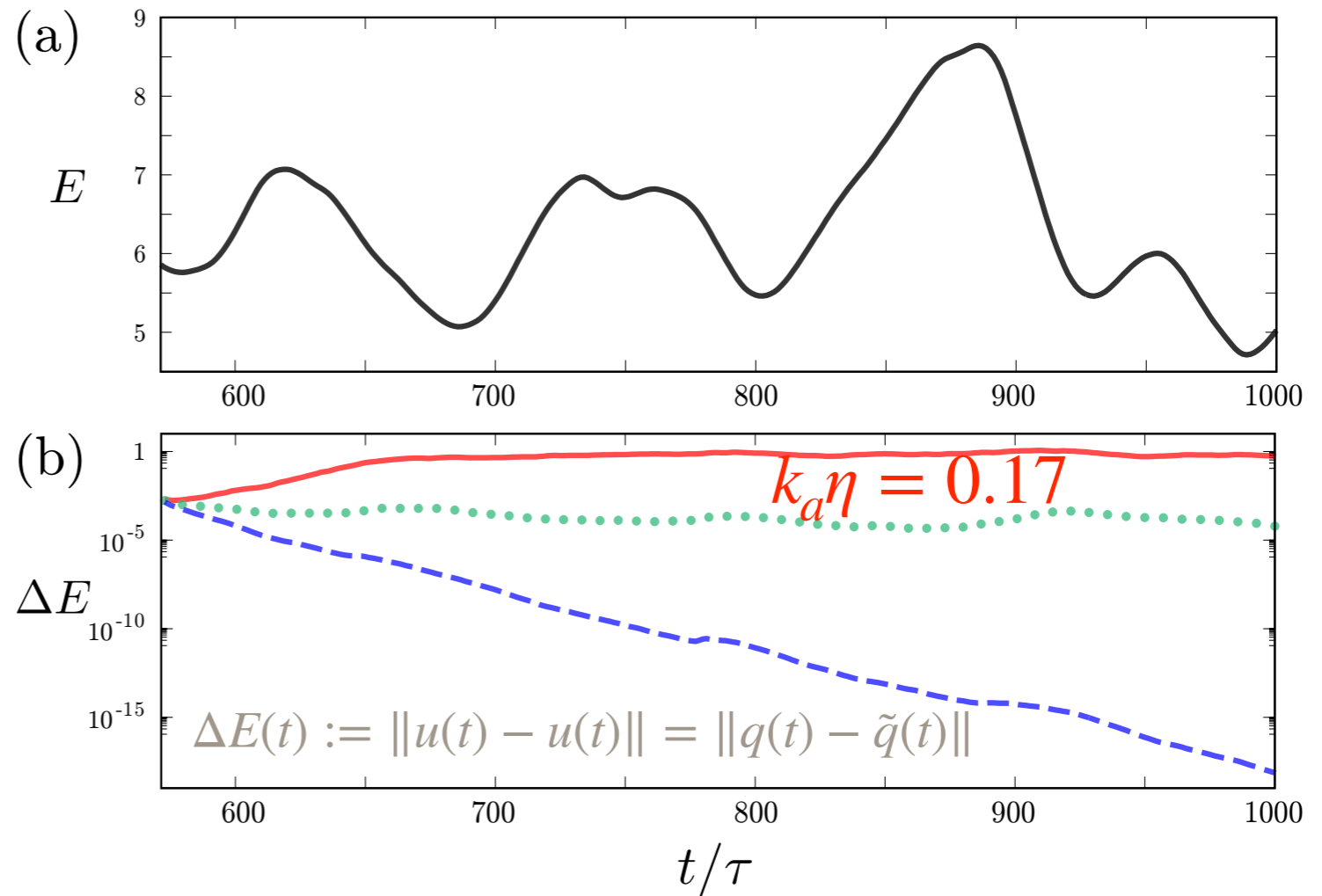
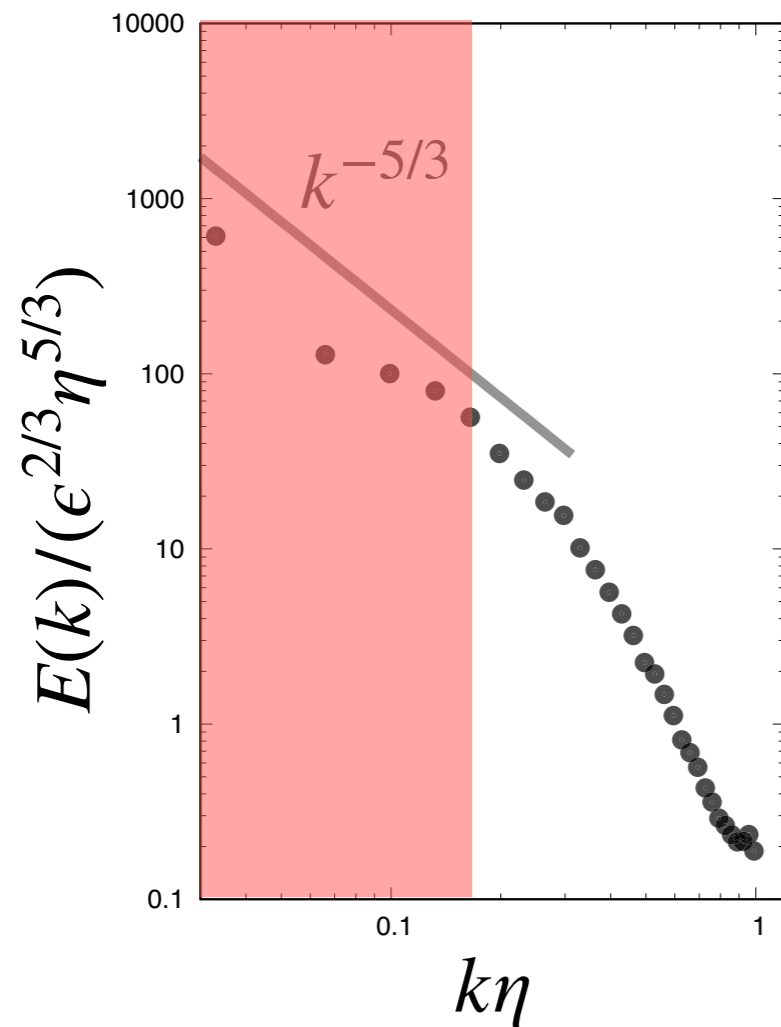
⇒NSEの性質として理解可能?

# 周期箱乱流のDA実験

$$Q_{k_a} := I - P_{k_a}, \quad P_{k_a} v := \sum_{|k| < k_a} \hat{v}_k e^{ikx}$$

$$f(x, y, z) = [+ \cos x \sin y, - \sin x \cos y, 0]$$

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \nabla \pi + \nu \Delta u + f, & \nabla \cdot u = 0 \\ \partial_t \tilde{q} + Q_{k_a} ((p + \tilde{q}) \cdot \nabla (p + \tilde{q})) = \nabla Q_{k_a} \tilde{\pi} + \nu \Delta \tilde{q} + Q_{k_a} f, & \nabla \cdot \tilde{q} = 0 \end{cases}$$

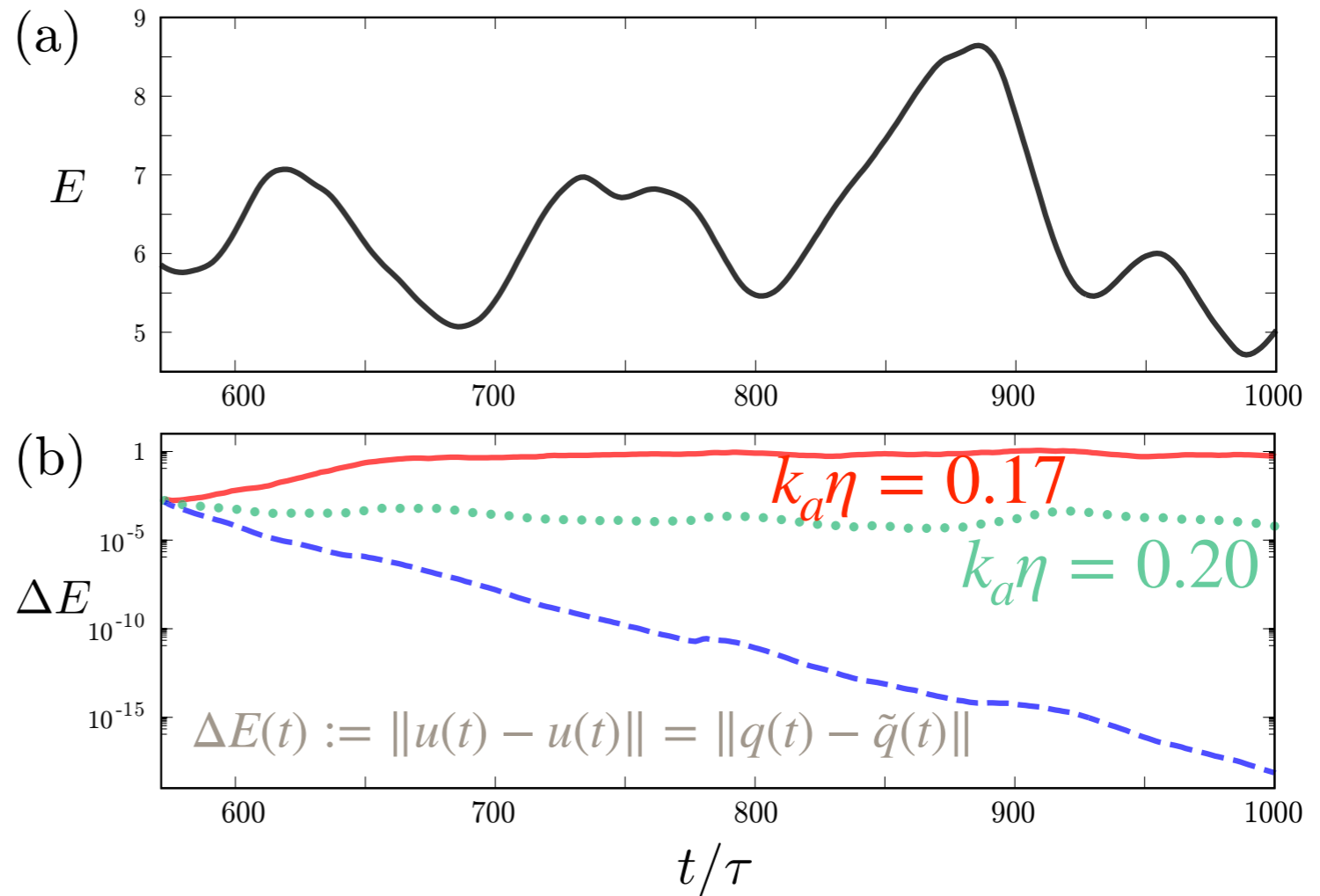
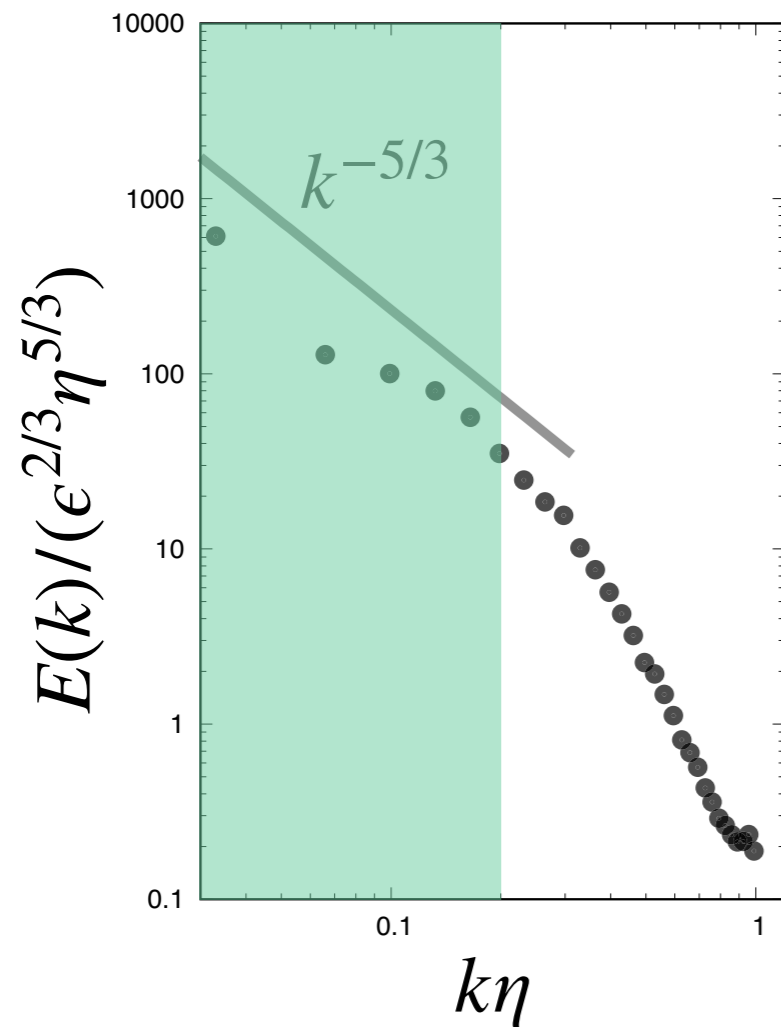


# 周期箱乱流のDA実験

$$Q_{k_a} := I - P_{k_a}, \quad P_{k_a} v := \sum_{|k| < k_a} \hat{v}_k e^{ikx}$$

$$f(x, y, z) = [+ \cos x \sin y, - \sin x \cos y, 0]$$

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \nabla \pi + \nu \Delta u + f, & \nabla \cdot u = 0 \\ \partial_t \tilde{q} + Q_{k_a} ((p + \tilde{q}) \cdot \nabla (p + \tilde{q})) = \nabla Q_{k_a} \tilde{\pi} + \nu \Delta \tilde{q} + Q_{k_a} f, & \nabla \cdot \tilde{q} = 0 \end{cases}$$

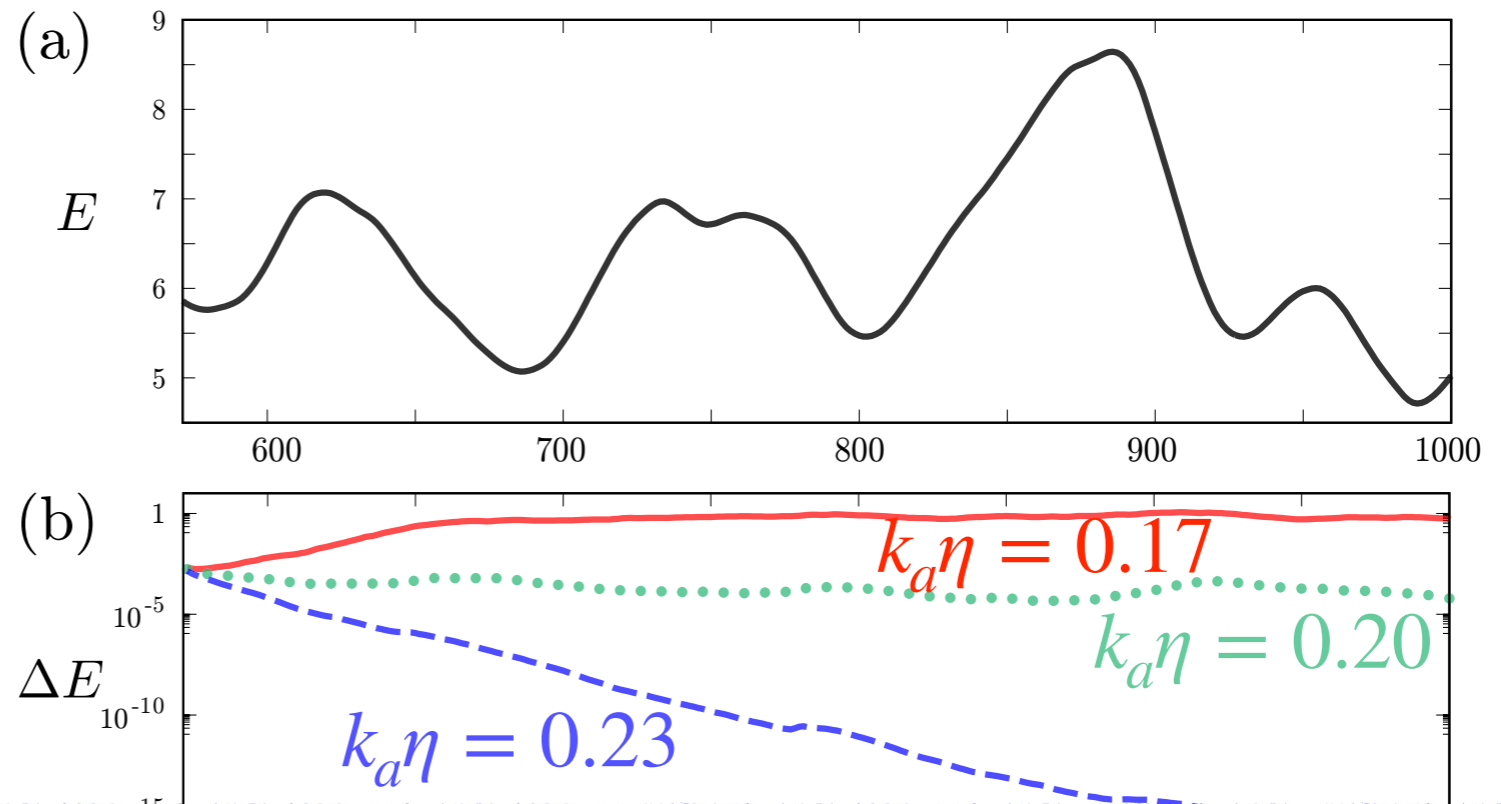
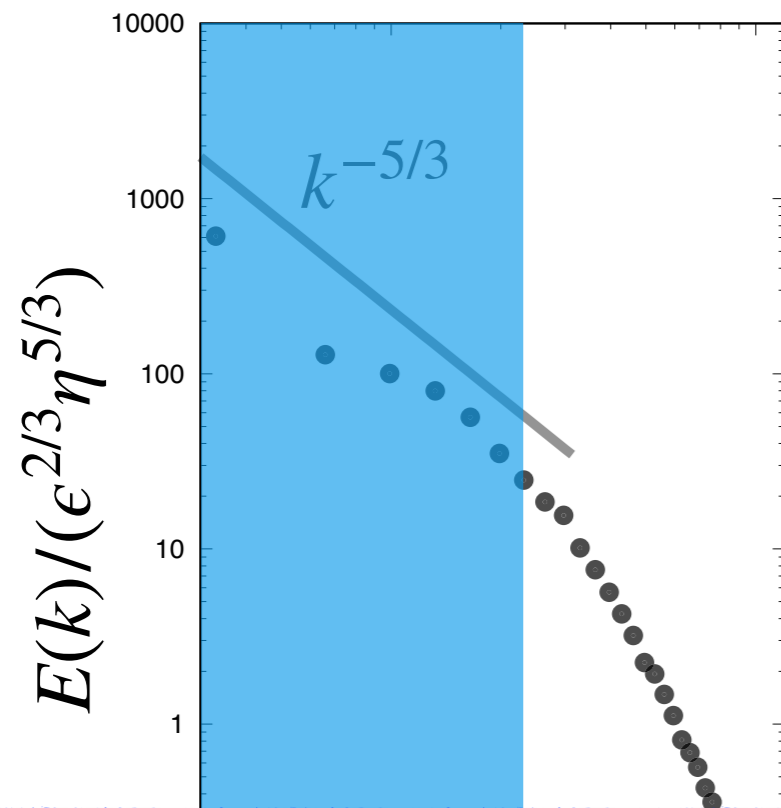


# 周期箱乱流のDA実験

$$Q_{k_a} := I - P_{k_a}, \quad P_{k_a} v := \sum_{|k| < k_a} \hat{v}_k e^{ikx}$$

$$f(x, y, z) = [+ \cos x \sin y, - \sin x \cos y, 0]$$

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \nabla \pi + \nu \Delta u + f, & \nabla \cdot u = 0 \\ \partial_t \tilde{q} + Q_{k_a} ((p + \tilde{q}) \cdot \nabla (p + \tilde{q})) = \nabla Q_{k_a} \tilde{\pi} + \nu \Delta \tilde{q} + Q_{k_a} f, & \nabla \cdot \tilde{q} = 0 \end{cases}$$

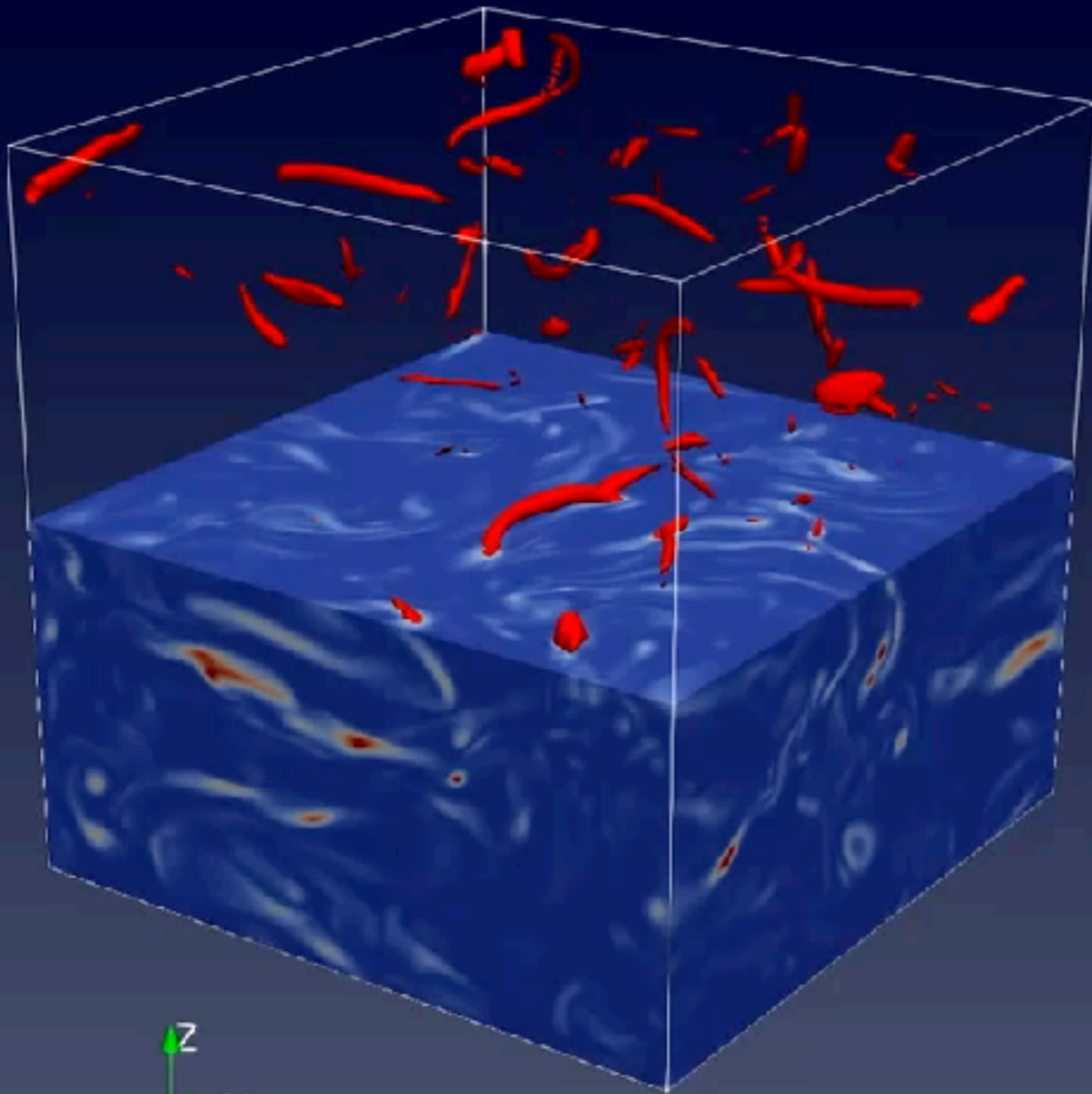


$$k_a \eta > 0.2 \Rightarrow \Delta E(t) \rightarrow 0 \quad (\because q_2(t) \rightarrow q_1(t))$$

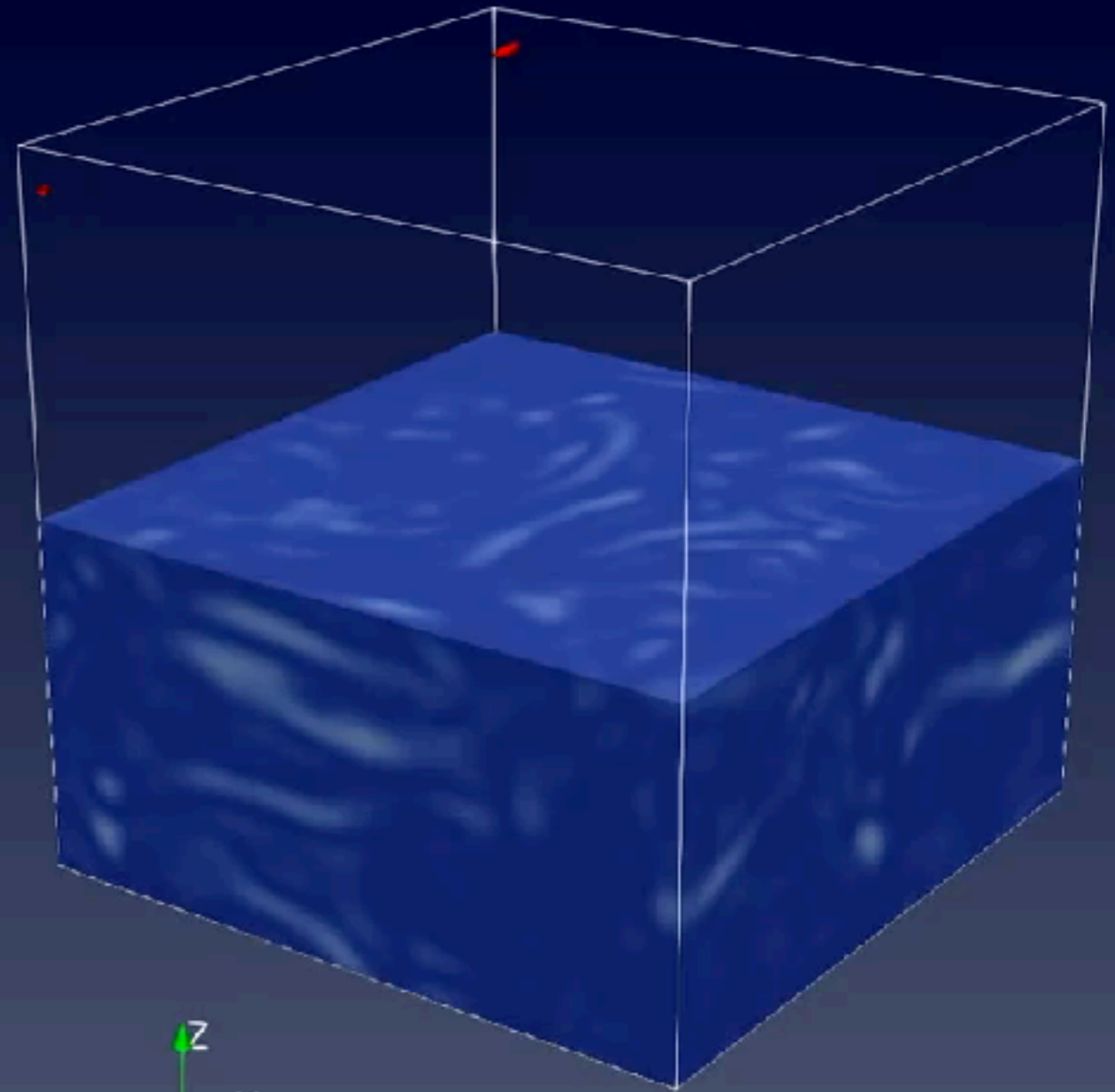
大スケールの運動が小スケールの運動を決定 (小スケール運動の隷属性)



NSE system  
 $\nabla \times u$  ( $u = p + q$ )



DA system  
 $\nabla \times \tilde{u}$  ( $\tilde{u} = p + \tilde{q}$ )



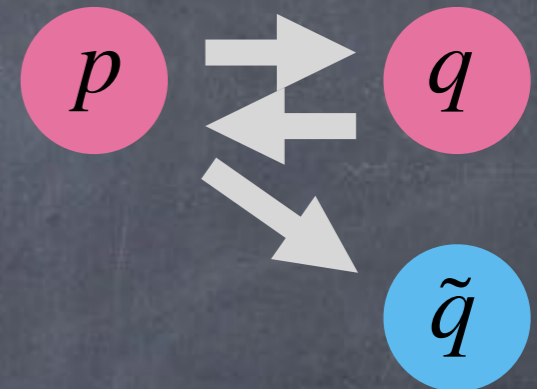
横断Lyapunov指数を用いた特徴付け

# 同期多様体とその安定性

▶ NSE+DA系：一方向結合力学系 (skew-product)

$$- \frac{dp}{dt} = F(p, q), \quad \frac{dq}{dt} = G(p, q) \quad (\text{NSE, base})$$

$$- \frac{d\tilde{q}}{dt} = G(p, \tilde{q}) \quad (\text{DA, fiber})$$



▶ 同期 (不変) 多様体:  $\mathcal{M} = \{(p, q, \tilde{q}) \mid q = \tilde{q}\}$

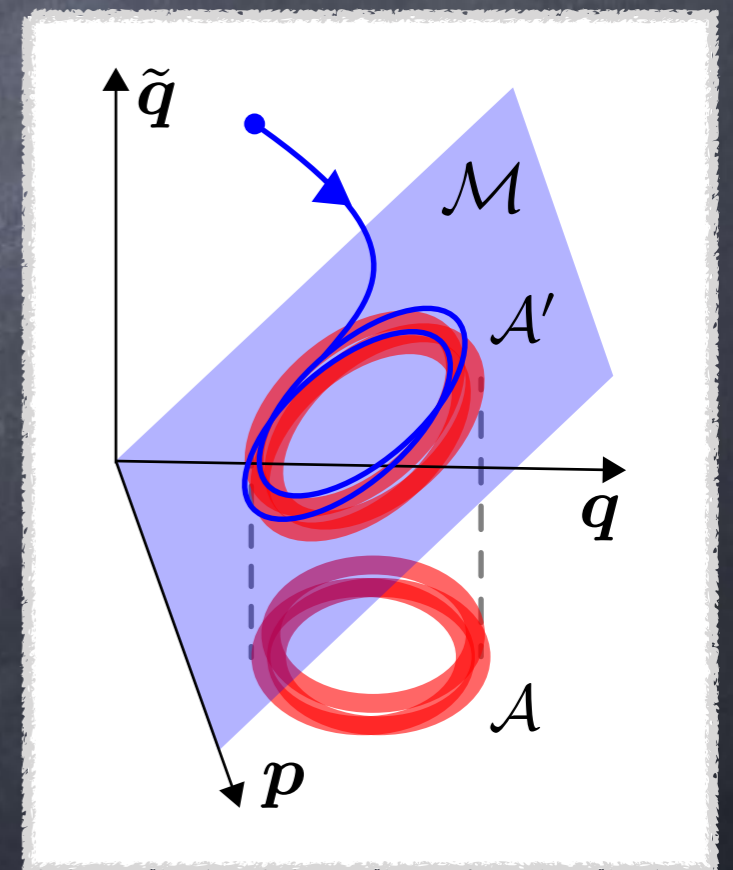
Fujisaka and Yamada, Prog. Theor. Phys. 69 (1983).

Ott and Sommerer, Phys. Lett. A 188 (1994)



同期多様体  $\mathcal{M}$  の漸近安定性  $\iff$

小スケールの隷属性  $\|q(t) - \tilde{q}(t)\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$



# 同期多様体とその安定性

▶ 安定性は横断Lyapunov指数で判定可能

- 変分方程式  $\frac{d\delta q}{dt} = [D_q G(p, q)]\delta q$   $\left( [D_q G]_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \right)$

( $\mathcal{M}$ からの無限小摂動 $\delta q$ を $\tilde{q} = q + \delta q$ として

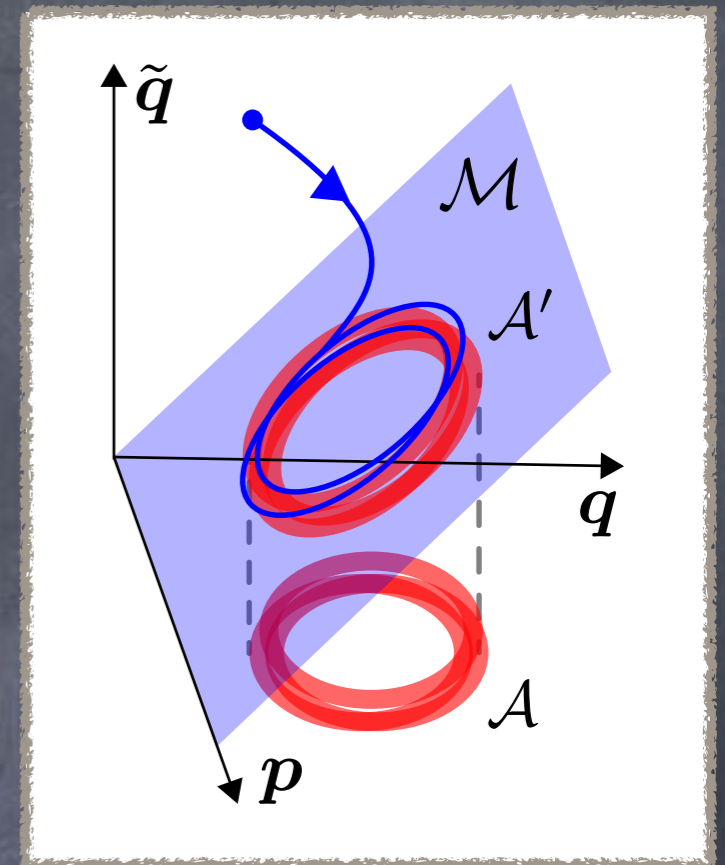
$\frac{d\tilde{q}}{dt} = G(p, \tilde{q})$ に代入し線形化)

- 横断Lyapunov指数

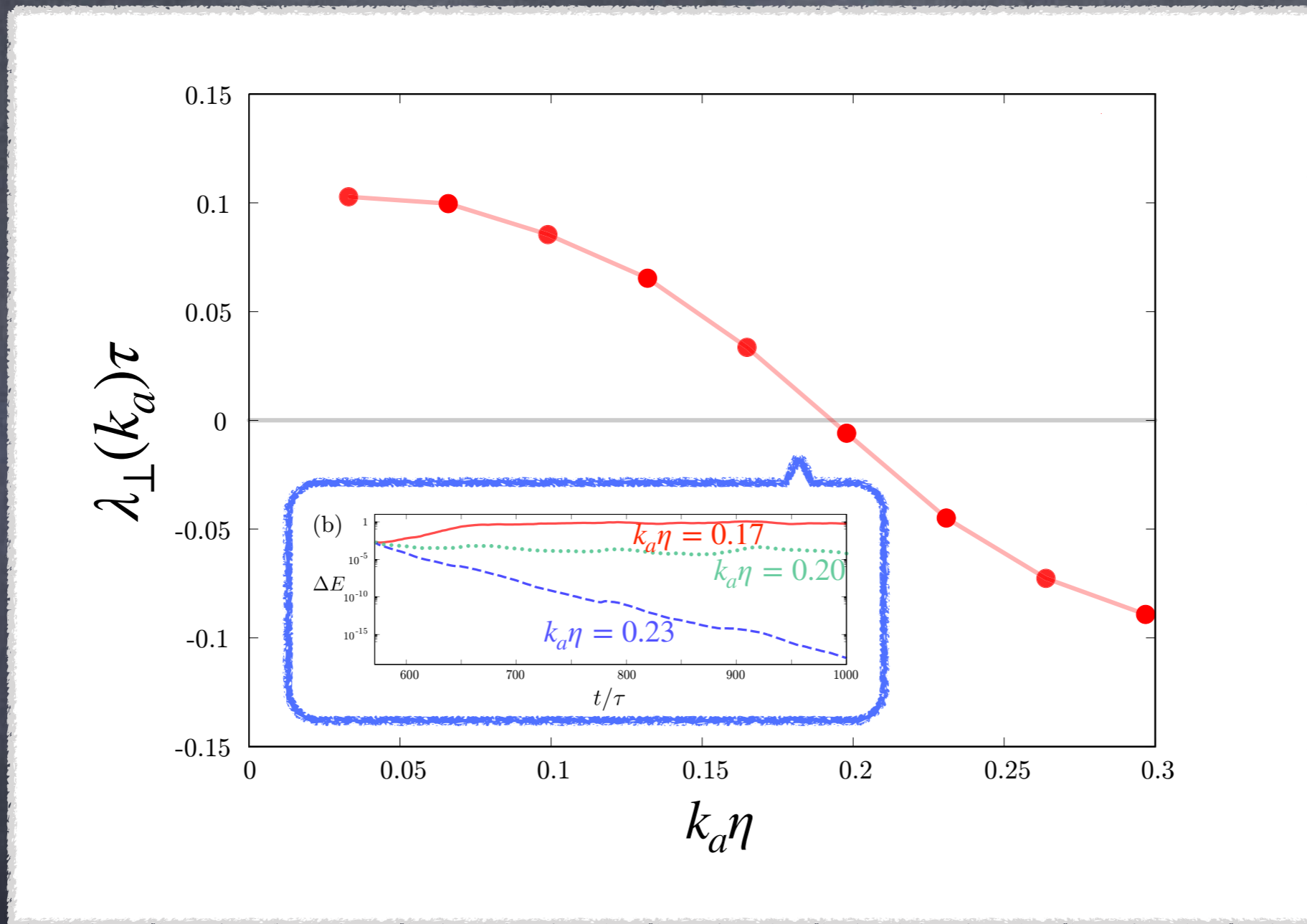
$\lambda_{\perp}(k_a) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \frac{\|\delta q(T)\|}{\|\delta q(0)\|}$  ( $\|\delta q(T)\| \propto \|\delta q(0)\| e^{\lambda_{\perp} T}$ )

- $k_a$ に依存
- 長時間平均量であり,  $\lambda_{\perp}(k_a) < 0$ なら乱流のどの初期状態からでもDAは成功.
- DA (やML) のアルゴリズムによらないNSEの特徴量

- (変分方程式:  $\partial_t \delta q + Q_{k_a} \{u \cdot \nabla \delta q + \delta q \cdot \nabla u\} = -\nabla \delta \pi + \nu \Delta \delta q$ )

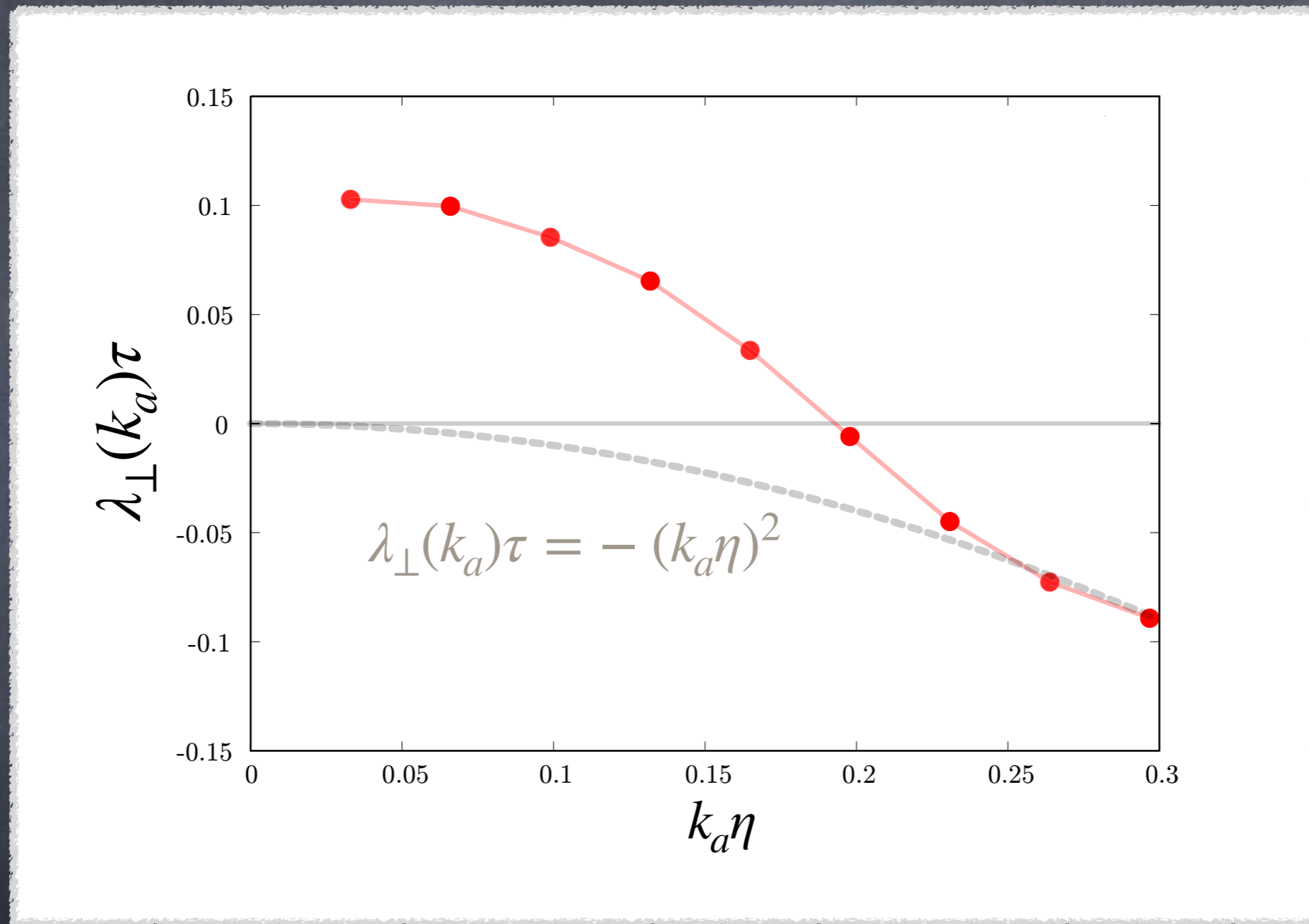


# 同期多様体とその安定性



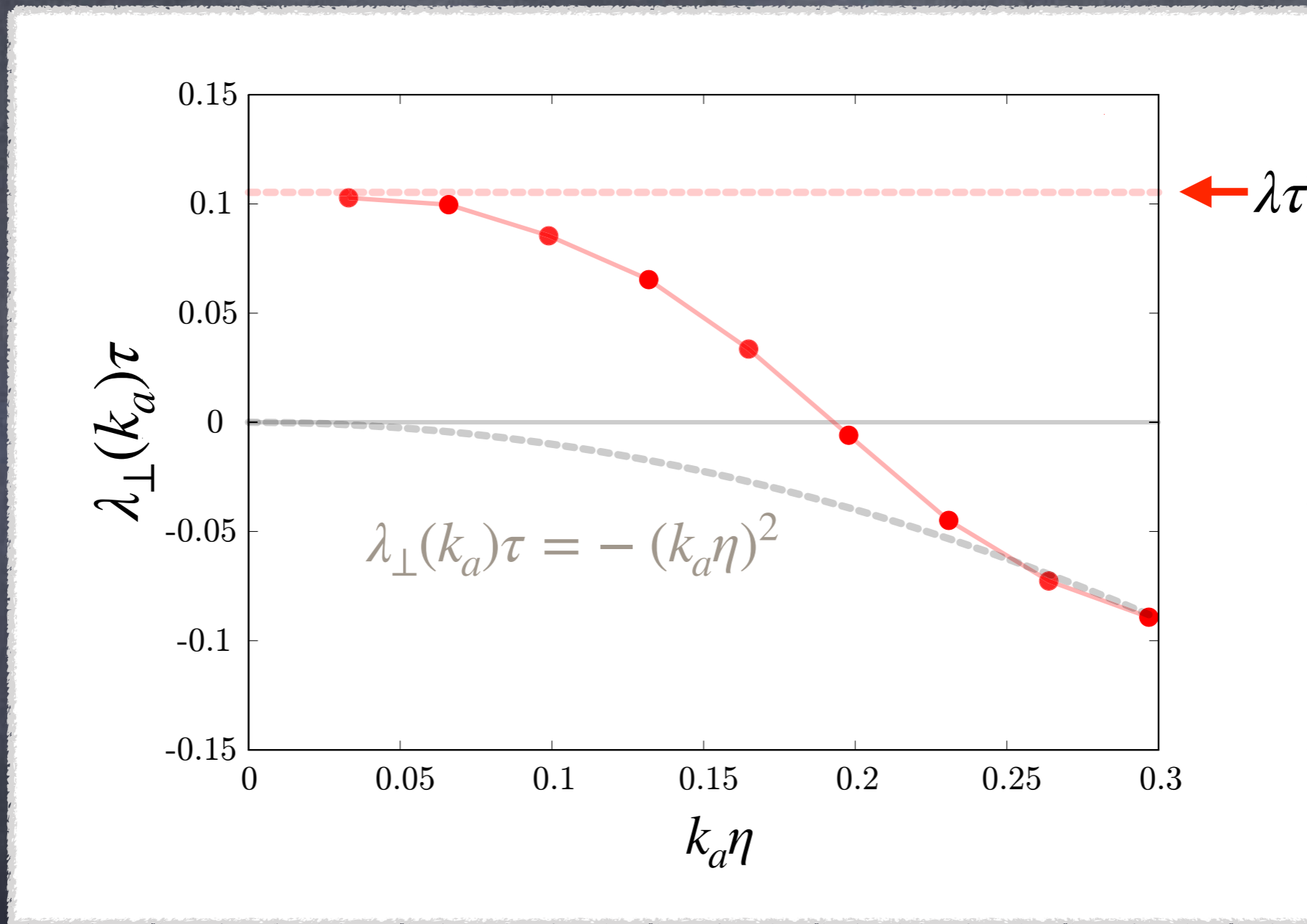
- ▶ 乱流の小スケール ( $k_a\eta > 0.2$ ) は隷属的 (NSEの性質)
- ▶ 横断Lyapunov指数の2つの極限, Reynolds数依存性?

# 横断Lyapunov指数 $\lambda_{\perp}(k_a)$ ( $k_a \rightarrow +\infty$ )



- ▶ 変分方程式 :  $\partial_t \delta q + Q_{k_a} \{u \cdot \nabla \delta q + \delta q \cdot \nabla u\} = -\nabla \delta \pi + \nu \Delta \delta q$
- ▶  $k_a \rightarrow +\infty$  において  $\partial_t \delta q \simeq \nu \Delta \delta q$  とすると,  $\lambda_{\perp} \tau \propto -(k_a \eta)^2$

# 横断Lyapunov指数 $\lambda_{\perp}(k_a = 0)$



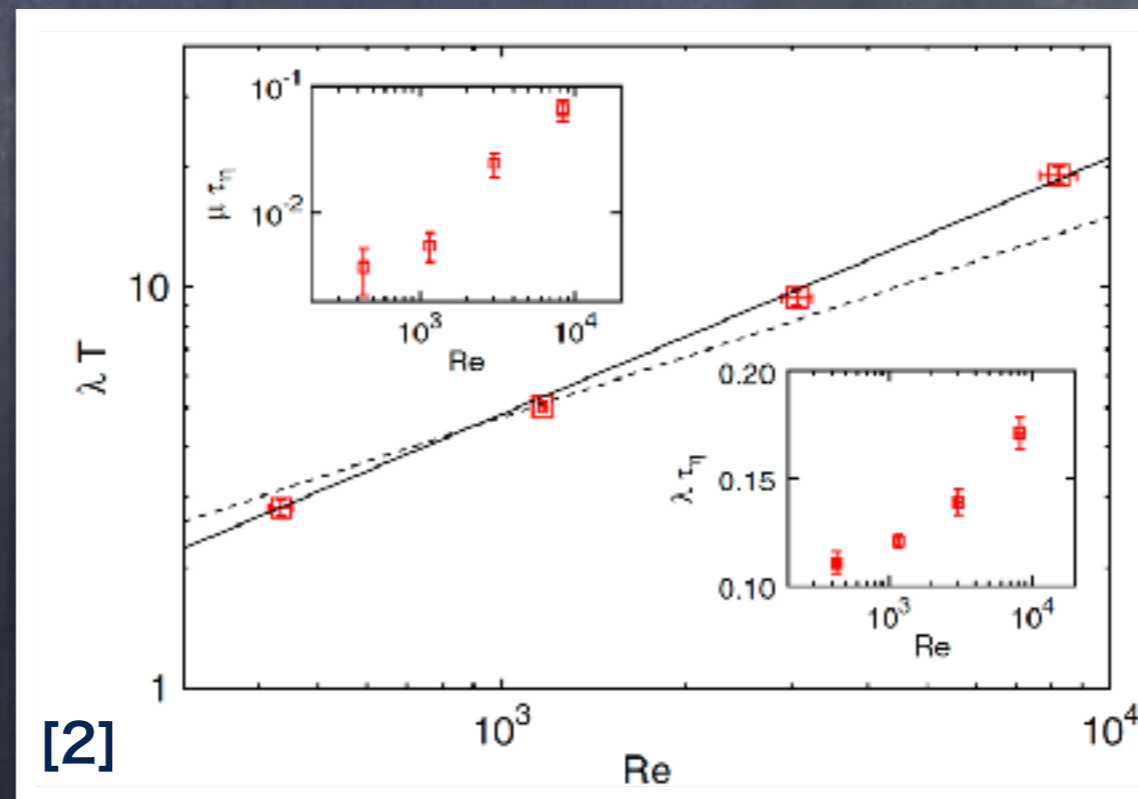
▶  $k_a = 0$  のとき,  $Q_{k_a} = I$ .  $\lambda_{\perp}(k_a = 0) = \lambda$  (最大Lyapunov指数)

∴ 変分方程式:  $\partial_t \delta q + Q_{k_a} \{u \cdot \nabla \delta q + \delta q \cdot \nabla u\} = -\nabla \delta \pi + \nu \Delta \delta q$

# (再掲) 乱流の力学系的解釈

## ▶ 乱流 ⊂ NSEによって定まる力学系のカオス

- 乱流のLyapunov指数： $\lambda \propto \tau^{-1}$  ( $\tau = (\nu/\epsilon)^{1/2}$ : Kolmogorov time)<sup>[1]</sup>
- 近年の数値的研究 (DNS) <sup>[2-4]</sup>： $\lambda\tau$ はわずかにRe数に依存して増大  
“we find that it increases with the Reynolds number, but surprisingly faster than what is predicted on dimensional grounds”<sup>[2]</sup>



[1] Ruelle, Phys. Lett. A 72 (1979)

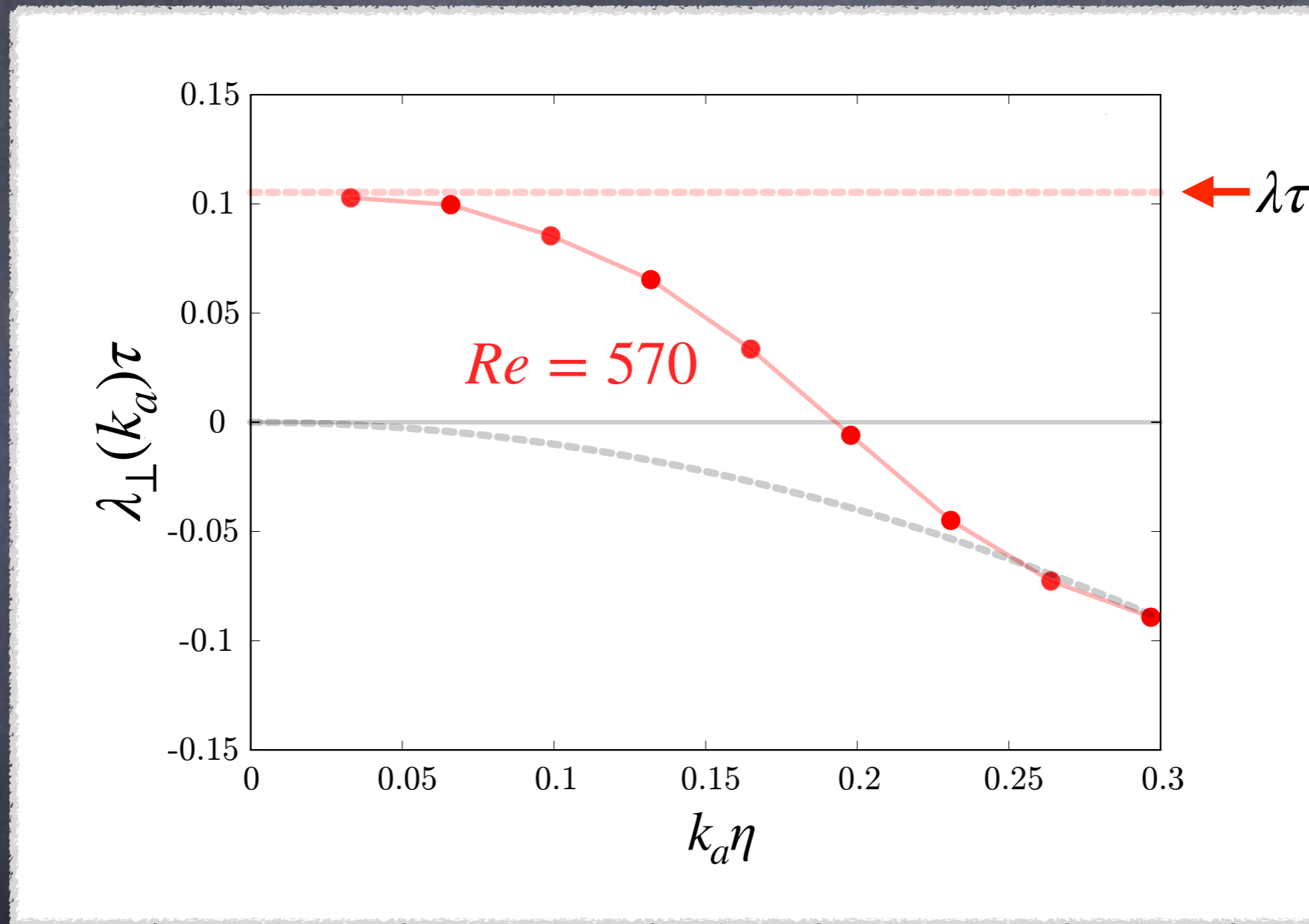
[2] Boffetta and Musacchio, PRL 119 (2017)

[3] Mohan, Fitzsimmons, and Moser, PRF 2 (2017)

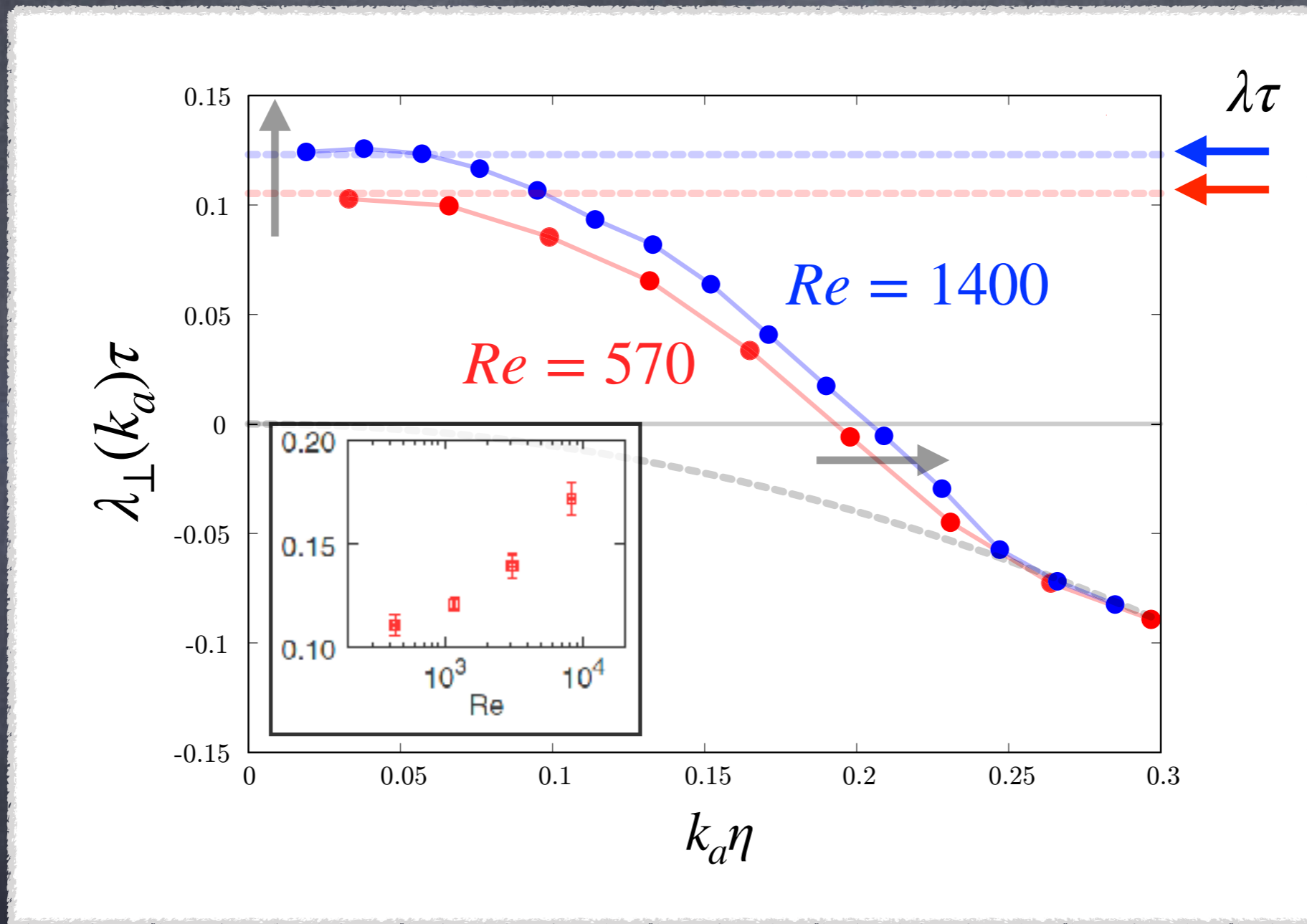
[4] Arjun and Ho, PRL 120 (2018)



# 横断Lyapunov指数のReynolds数依存性



# 横断Lyapunov指数のReynolds数依存性



- ▶ 最大Lyapunov指数と横断Lyapunov指数の関係： $\lambda_{\perp}(k_a = 0) = \lambda$
- ▶ 臨界スケール  $k_a^*\eta = 0.2$  は定数でなく， Reynolds数と共に増大

# まとめ



データ駆動型乱流研究の基礎付けに力学系理論は有効

- MLによる乱流モデルの低次元化限界 (Lyapunov次元) [1]
- 乱流の小スケール渦の隸属性とデータ同化限界 (横断Lyapunov指数) [2]

## 今後の展開と課題

- MLによる乱流モデルの実現可能性 ( $k\eta \simeq 0.2$ の“壁”) [3]
- 真にシミュレーションが必要な現象は一般に学習データが入手困難。  
学習データがない領域には力学的知見を用いた“外挿”が必須。  
(乱流のエネルギーカスケードに基づく転移学習[4])
- データ駆動型GFD研究? (w/ Prof. Caulfield@DAMTP, 2024年3月~)

[1] Linot and Graham, Dynamics of a data-driven low-dimensional model of turbulent minimal Couette flow, J. Fluid Mech. 973, A42 (2023).

[2] Inubushi, Saiki, Kobayashi, and Goto, Characterizing small-scale dynamics of Navier-Stokes turbulence with transverse Lyapunov exponents: A data assimilation approach, Phys. Rev. Lett. 131, 254001 (2023).

[3] Matsumoto, Inubushi, and Goto, Feasibility of turbulence model by machine learning (in preparation).

[4] Inubushi and Goto, Transfer learning for nonlinear dynamics and its application to fluid turbulence, Phys. Rev. E 102, 043301 (2020).